Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
Section des Sciences, 8^{me} série t. XII, n° 3.

OM SANDSYNLIGHEDSFORDELINGER VED ADDITION AF KONVEKSE KURVER

AF

HARALD BOHR OG BØRGE JESSEN

MED 34 FIGURER

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, XII. 3.

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1929

Pris: Kr. 8,60.

OM SANDSYNLIGHEDSFORDELINGER VED ADDITION AF KONVEKSE KURVER

AF

HARALD BOHR OG BØRGE JESSEN

MED 34 FIGURER

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, XII. 3

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1929

FORORD

AF

HARALD BOHR

Udgangspunktet for Undersøgelserne i den foreliggende Afhandling er nogle Arbejder af mig for en Række Aar tilbage vedrørende den Riemannske Zetafunktion. I disse Arbejder blev det vist, ved Hjælp af Læren om Diofantiske Approximationer, at Spørgsmaalet om Fordelingen af Zetafunktionens Værdier paa det nøjeste hang sammen med visse rent geometriske Spørgsmaal om *Addition af konvekse Kurver*. Undersøgelserne, som delvis blev udført i Samarbejde med Professor Courant i Göttingen, førte vel til Resultater, der beskrev den paagældende Værdifordeling i store Træk, men de blev ikke den Gang ført saa fuldstændig igennem, som Metoderne tillod; dog fik jeg Lejlighed til i et Foredrag paa den skandinaviske Matematikerkongres i Helsingfors 1922 at angive Hovedlinierne for en saadan afsluttende Undersøgelse. Arbejdet blev imidlertid afbrudt ved, at jeg kom ind paa andre Problemer, og først for et Aarstid siden har jeg genoptaget det. Det drejede sig i første Linie om et geometrisk Forarbejde vedrørende Addition af konvekse Kurver *med givne Sandsynlighedsfordelinger*. Jeg var saa heldig til dette Arbejde at kunne knytte Hr. Jessen som Medarbejder. For det oprindelige Formaal, Anvendelsen paa Zetafunktionens Teori, vilde det have været tilstrækkeligt at gennemføre disse geometriske Undersøgelser for visse specielle Typer af konvekse Kurver. Naar det foreliggende Arbejde imidlertid ikke indskrænker sig til at behandle saadanne specielle Kurver, men har en langt videregaaende Karakter, skyldes det Hr. Jessen, hvem det er lykkedes paa naturlig Maade at afgrænse et Omraade af almindelige konvekse Kurver, for hvilke de paagældende Undersøgelser kunde gennemføres, uden at dette førte til Komplikationer i Beviserne, ja snarere medførte større Overskuelighed. Afhandlingen har herved faaet en væsentlig anden Karakter end oprindelig tænkt, og turde, som den foreligger, paaregne en vis almindelig geometrisk Interesse, ganske uafhængig af Anvendelserne indenfor Funktionsteorien. Ogsaa Gennemførelsen af en Række geometriske Enkeltundersøgelser skyldes udelukkende Hr. Jessen, ligesom det er ham, der har foretaget Udarbejdelsen af den hele Afhandling og paataget sig alt Arbejdet med Tegningen af de talrige Figurer og Korrekturlæsningen.

I nogle følgende fælles Arbejder vil Hr. Jessen og jeg udførligt behandle Anvendelserne af de her vundne Resultater paa Problemet om Zetafunktionens Værdifordeling, der som ovenfor nævnt var det oprindelige Udgangspunkt for vort Arbejde.

KAPITEL I.

Om konvekse Kurver.

Forinden vi paabegynder Behandlingen af vort egentlige Emne: Addition af konvekse Kurver med givne Sandsynlighedsfordelinger, skal vi i dette Kapitel (tildels uden Beviser) give en kort Oversigt over de Sætninger om konvekse Jordankurver, som vi især kommer til at anvende i det følgende.

Almindelige Bemærkninger om konvekse Kurver.

1. Ved en *Jordankurve* forstaas en lukket kontinuert Kurve uden Dobbeltpunkter, eller præcisere: en Punktmængde, der kan afbildes enentydig og kontinuert paa en Cirkelperiferi. En Jordankurve deler som bekendt Mængden af alle de af Planens Punkter, der ikke er beliggende paa selve Kurven, i to Omraader, et indenfor Kurven og et udenfor Kurven beliggende Omraade, for hvilke Kurven selv er den fælles Begrænsning. Betegnes Kurven ω, vil vi for disse Omraader anvende Betegnelserne $I(\omega)$ og $Y(\omega)$. Med $\overline{I}(\omega)$ og $\overline{Y}(\omega)$ vil vi betegne de afsluttede Mængder, som fremgaar af $I(\omega)$ og $Y(\omega)$ ved Tilføjelse af Begrænsningen ω.

En ret Linie kaldes *Støttelinie* for en afsluttet Punktmængde i Planen, naar den indeholder mindst et Punkt af Mængden, og denne er beliggende helt i den ene af de to afsluttede Halvplaner, som begrænses af Linien. En lukket Polygon kaldes konveks, naar enhver Linie, som forbinder to paa hinanden følgende Vinkelspidser, er Støttelinie for Polygonen; denne Definition udelukker ikke, at tre eller flere paa hinanden følgende Vinkelspidser i Polygonen ligger paa ret Linie. *En Jordankurve kaldes konveks, naar enhver Polygon, der opstaar ved at man forbinder en Række efter hinanden følgende Punkter* $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1} = P_1$ *af Kurven, er konveks* (se Fig. 1).

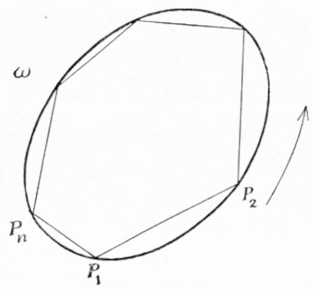

Fig. 1.

Lad der være givet en konveks Jordankurve ω. Det er en simpel Følge af Konveksiteten, at der i ethvert Punkt P af Kurven findes en Halvtangent til hver Side, bestemt som Grænsestilling for en Halvlinie, der udgaar fra P, og som indeholder et Punkt af Kurven, der fra en bestemt Side konvergerer mod P. De to Halvtangenter i Punktet P danner en Vinkel mindre end eller lig med π, hvori Kurven er beliggende. Er Vinklen lig med π, falder Halvtangenterne i hinandens Forlængelse og danner Kurvens Tangent i P, som er en Støttelinie (og den eneste Støttelinie) til Kurven gennem P. I modsat Fald har Kurven et Knæk i Punktet P, og der findes uendelig mange Støttelinier til Kurven gennem P. Har en konveks Jordankurve i ethvert af sine Punkter P en bestemt Tangent, vil denne variere monotont, naar Punktet gennemløber Kurven; omvendt vil en Jordankurve, som i ethvert Punkt har en bestemt Tangent, sikkert være konveks, naar Tangenten varierer monotont med Røringspunktet. En Støttelinie til en Jordankurve ω er altid tillige Støttelinie for Omraadet $\bar{I}(\omega)$.

Analoge Definitioner og Sætninger til de her angivne kan opstilles for vilkaarlige kontinuerte Kurver. Man viser let, at en lukket kontinuert Kurve (defineret som det entydige og kontinuerte Billede af en Cirkelperiferi), naar den er konveks, (d. v. s. naar enhver indskreven Polygon, hvis Vinkelspidser svarer til en Række efter hinanden følgende Punkter paa Cirkelperiferien, er konveks), og naar den ikke netop reducerer sig til et Punkt eller til et ret Liniestykke, aldrig vil kunne indeholde andre Dobbeltpunkter end saadanne, som fremkommer ved, at et Punkt paa Kurven svarer til en hel Bue paa Cirkelperiferien, og derfor som Punktmængde betragtet vil kunne opfattes som en konveks Jordankurve. Dette er Grunden til, at vi i det følgende hyppigt taler om konvekse Jordankurver blot som lukkede konvekse Kurver.

2. En Punktmængde kaldes konveks, naar den med hvilkesomhelst to Punkter tillige indeholder det Liniestykke, der forbinder dem. En konveks Jordankurve er, opfattet som Punktmængde, ikke konveks. Vi vil imidlertid vise, at *en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for, at en Jordankurve ω er konveks, er den, at det af den begrænsede indre Omraade $I(\omega)$ er en konveks Punktmængde.*

Betingelsen er *nødvendig*. Lad ω være en konveks Jordankurve. Vi betragter samtlige Støttelinier til Kurven og de af dem begrænsede afsluttede Halvplaner, hvori Kurven er beliggende. Hver af disse er en konveks Mængde. Det samme gælder derfor om den ligeledes afsluttede Mængde M, der udgøres af de fælles Punkter for samtlige Halvplaner. Ethvert Punkt af Kurven tilhører M, thi det tilhører alle Halvplanerne. Det er et Randpunkt for M, thi det er et Randpunkt for mindst en af Halvplanerne bestemt ved en Støttelinie gennem Punktet. Et Punkt af $I(\omega)$ vil, tillige med en vis Omegn, tilhøre samtlige Halvplaner og vil altsaa ogsaa være indre Punkt af M. Heraf følger imidlertid, at ethvert Punkt P af $Y(\omega)$ maa falde udenfor M. Tilhørte det nemlig M, kunde vi forbinde det med et Punkt Q af $I(\omega)$. Da dette tillige med en vis Omegn tilhører M, vilde alle Punkter af Liniestykket PQ, undtagen maaske P, være indre Punkter af M. Nu ligger der paa PQ mindst et Punkt af ω; dette maatte altsaa være indre Punkt af M i Modstrid med, hvad vi ovenfor viste. Heraf følger da, at Jordankurven ω maa være identisk med Randen af den konvekse Mængde M, Omraadet $I(\omega)$ med Mængden af indre Punkter i M, Omraadet $Y(\omega)$ med Mængden af Punkter udenfor M. Nu indeholder et Liniestykke, der forbinder to indre Punkter af M, lutter indre Punkter af M. Omraadet $I(\omega)$ er altsaa en konveks Punktmængde.

Betingelsen er *tilstrækkelig*. Lad ω være en Jordankurve, og lad $I(\omega)$ være en konveks Mængde; ω er Begrænsningen for denne Mængde. Man viser uden Vanskelighed, ved Hjælp af Konveksiteten, at der gennem hvert Punkt af ω gaar en ret Linie, som ikke indeholder noget Punkt af $I(\omega)$. Denne Linie vil være Støttelinie for ω. Lad nu $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1} = P_1$ være en Polygon, som fremkommer ved, at man forbinder en Række efter hinanden følgende Punkter af Kurven. Vi vil vise, at denne er konveks. Lad $P_\nu P_{\nu+1}$ være en Side i Polygonen. Enten er den rette Linie $P_\nu P_{\nu+1}$ Støttelinie for ω og altsaa ogsaa for Polygonen, eller den er ikke Støttelinie for ω; i saa Fald indeholder Kurven kun de to Punkter P_ν og $P_{\nu+1}$ af Linien; var der nemlig et tredje Punkt, maatte et af de tre Punkter ligge mellem de to andre, og Støttelinien til Kurven gennem dette Punkt maatte være den betragtede Linie mod Forudsætning. Buen $P_{\nu+1} P_\nu$ paa Jordankurven, som rummer Polygonen, falder altsaa sikkert helt i den ene af de afsluttede Halvplaner, som begrænses af Linien $P_\nu P_{\nu+1}$, og denne er sikkert en Støttelinie for Polygonen. Hermed er den opstillede Sætning bevist.

Af Beviset kan vi aflede en simpel Følgesætning. Bemærker man, at der ved Beviset for, at den angivne Betingelse er nødvendig, kun er anvendt den ene Egenskab ved Jordankurven ω, at der *gennem hvert af dens Punkter gaar en Støttelinie til Kurven*, ser man, at *denne Egenskab ved en given Jordankurve er tilstrækkelig til at sikre, at Kurven er konveks.*

Da ethvert konvekst Omraade, som er beliggende helt i det endelige, begrænses af en Jordankurve, ser man, ved Anvendelse af den beviste Sætning, at den ovenfor givne Definition af en konveks Jordankurve er identisk med følgende: *En konveks Kurve er Begrænsningen for et konvekst Omraade, der er beliggende helt i det endelige.*

I Tilslutning til den første Definition definerer man Længden af en lukket konveks Kurve som øvre Grænse for Længden af alle indskrevne konvekse Polygoner. Denne Størrelse eksisterer altid. Paa tilsvarende Maade defineres en Buelængde paa Kurven og, almindeligere, et (lineært) JORDAN'sk Maal for Punktmængder paa Kurven. Det plane JORDAN'ske Maal for en lukket konveks Kurve er Nul. Ved Arealet af en lukket konveks Kurve vil vi i det følgende stedse forstaa Arealet (d. v. s. det plane JORDAN'ske Maal) af det af Kurven begrænsede Omraade. Dette Maal eksisterer altid.

Addition af konvekse Kurver.[1]

3. Lad der i en Plan *med fastlagt Begyndelsespunkt O* være givet et endeligt Antal Punkter $P_0, P_1, \ldots, P_N$. Ved Summen $P = \sum_{n=0}^{N} P_n$ af disse Punkter vil vi paa sædvanlig Maade forstaa Endepunktet P for den Vektor OP, der bestemmes som

[1] Dette Afsnit gengiver i sammentrængt Form de vigtigste Resultater af en udførligere Afhandling af H. BOHR: Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandlinger 1913.

Sum af Vektorerne OP_0, OP_1, ..., OP_N. Betegner M_0, M_1, ..., M_N et endeligt Antal af Punktmængder i Planen, vil vi ved Summen M af disse Punktmængder forstaa Mængden af samtlige Punkter $P = \sum_{n=0}^{N} P_n$, hvor Punkterne P_0, P_1, ..., P_N tilhører hver sin af de givne Mængder. Det til et givet Punkt P symmetriske Punkt m. H. t. Begyndelsespunktet betegner vi $-P$. Subtraktion af Punktet P skal være ensbetydende med Addition af Punktet $-P$. Den til en given Mængde M symmetriske Mængde m. H. t. Begyndelsespunktet betegner vi paa tilsvarende Maade $-M$; $-M$ er den Punktmængde, der fremkommer, naar M drejes 180° om Begyndelsespunktet O. Subtraktion af Mængden M skal være ensbetydende med Addition af Mængden $-M$. Er P et givet Punkt og M en given Mængde, vil Punktmængden $P+M$ fremgaa af M ved den ved Vektoren OP bestemte Parallelforskydning; Mængden $P-M$ vil fremgaa af M ved en Drejning paa 180° omkring Midtpunktet af Liniestykket OP. Af Reglerne for Vektorers Addition følger umiddelbart at den indførte Addition af Punktmængder tilfredsstiller saavel den kommutative som den associative Lov.

4. Lad

(1) $$\omega_0, \ \omega_1, \ \ldots, \ \omega_N, \ \ldots$$

være en Følge af konvekse Kurver. Vi vil betragte den Følge af Punktmængder

(2) $$\Sigma_0 = \omega_0, \ \Sigma_1 = \omega_0 + \omega_1, \ \ldots, \ \Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} \omega_n, \ \ldots,$$

som fremkommer, idet Kurverne adderes i den opskrevne Rækkefølge. For ethvert n fremgaar Mængden Σ_{n+1} af den foregaaende Mængde Σ_n ved Addition af Kurven ω_{n+1}; en nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for, at et vilkaarligt Punkt P i Planen tilhører Σ_{n+1}, er derfor den, at Kurven $P - \omega_{n+1}$ indeholder mindst et Punkt af Σ_n.

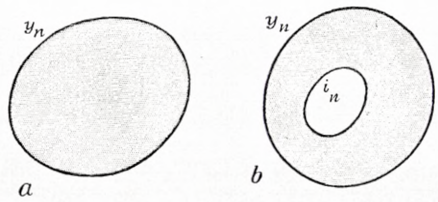

Fig. 2.

Punktmængderne Σ_n, $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ *er alle begrænsede.* Vi vil vise, at *de er afsluttede Mængder, som hver for sig enten bestaar af et enkelt afsluttet konvekst Omraade* $\overline{I}(y_n)$ *eller af et afsluttet konvekst Omraade* $\overline{I}(y_n)$ *minus et aabent konvekst Omraade* $I(i_n)$. *I det første Tilfælde* (Fig. 2a) *begrænses* Σ_n *af en enkelt konveks Kurve* y_n, *i det andet Tilfælde* (Fig. 2b) *af to konvekse Kurver* y_n *og* i_n.

For $n = 0$ er denne Sætning sikkert rigtig; Kurverne y_0 og i_0 falder sammen med ω_0. For at vise Sætningens almindelige Gyldighed antager vi den rigtig for et eller andet n og viser herudfra dens Rigtighed ogsaa for $n+1$. Komplementærmængden Σ_n^* til Σ_n bestaar enten af et enkelt Omraade $Y(y_n)$, hvor y_n er en lukket konveks Kurve, eller af to Omraader $Y(y_n)$ og $I(i_n)$, hvor y_n og i_n er lukkede konvekse Kurver, af hvilke den første omslutter den sidste. Betingelsen for, at et Punkt

P tilhører Komplementærmængden Σ^*_{n+1} til Σ_{n+1}, er den, at Kurven $P - \omega_{n+1}$ tilhører Σ^*_n. Dette er muligt paa tre væsentlig forskellige Maader:

1. den kan tilhøre Omraadet $I(i_n)$;
2. den kan tilhøre Omraadet $Y(y_n)$, idet den omslutter y_n;
3. den kan tilhøre Omraadet $Y(y_n)$ uden at omslutte y_n.

Den første Mulighed bortfalder, saafremt Σ^*_n kun bestaar af det ene Omraade $Y(y_n)$. I det første Tilfælde tilhører $\bar{I}(P - \omega_{n+1})$ Omraadet $I(i_n)$; i det andet Tilfælde tilhører $\bar{Y}(P - \omega_{n+1})$ Omraadet $Y(y_n)$, medens endelig i det tredje Tilfælde $\bar{I}(P - \omega_{n+1})$ tilhører $Y(y_n)$.

Medens der altid findes Punkter P, for hvilke den tredje Mulighed indtræffer, vil det afhænge af de givne Kurver, om der findes Punkter, for hvilke den første eller den anden Mulighed indtræffer, og disse to Muligheder kan aldrig forekomme samtidig; den første fordrer nemlig, at Arealet af ω_{n+1} skal være mindre end Arealet af i_n, medens den anden Mulighed fordrer, at det skal være større end Arealet af y_n; falder Arealet af ω_{n+1} mellem Arealerne af i_n og y_n, har vi et Eksempel paa et Tilfælde, hvor alene den tredje Mulighed indtræffer.

Mængden af Punkter, for hvilke den tredje Mulighed indtræffer, danner et Omraade, som vi vil vise er det ydre Omraade for en konveks Jordankurve. Komplementærmængden M til dette Omraade er en afsluttet Punktmængde. Betingelsen for, at et Punkt P tilhører M, er den, at $\bar{I}(P - \omega_{n+1})$ ikke tilhører $Y(y_n)$, at altsaa $\bar{I}(P - \omega_{n+1})$ og $\bar{I}(y_n)$ har mindst et fælles Punkt. M er saaledes beliggende helt i det endelige. Lad (se Fig. 3) P_1 og P_2 være to vilkaarlige Punkter af M, og lad $\bar{I}(P_1 - \omega_{n+1})$ og $\bar{I}(P_2 - \omega_{n+1})$ have henholdsvis Punktet Q_1 og Punktet Q_2 fælles med $\bar{I}(y_n)$. Lad P være et Punkt af Strækningen P_1P_2. Punktmængden $\bar{I}(P - \omega_{n+1})$ indeholder saavel Punktet $Q_1 + (P - P_1)$ som Punktet $Q_2 + (P - P_2)$, følgelig ogsaa det Liniestykke, der forbinder dem. Dette Liniestykke skærer Liniestykket Q_1Q_2 i et Punkt Q, som er et fælles Punkt for $\bar{I}(P - \omega_{n+1})$ og $\bar{I}(y_n)$. P tilhører altsaa M. Punktmængden M er følgelig konveks og begrænses af en konveks Jordankurve; betegner vi denne y_{n+1}, er M identisk med Mængden $\bar{I}(y_{n+1})$, Omraadet $Y(y_{n+1})$ med Mængden af Punkter, for hvilke den tredje af de angivne Muligheder indtræffer.

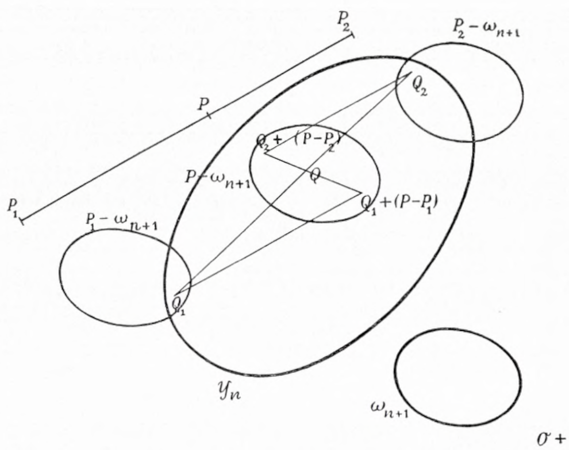

Fig. 3.

Indtræffer for samtlige Punkter P af Σ^*_{n+1} denne tredje Mulighed, er Σ^*_{n+1} identisk med $Y(y_{n+1})$, Σ_{n+1} følgelig med det afsluttede Omraade $\bar{I}(y_{n+1})$. Findes der derimod Punkter, for hvilke enten den første eller den anden Mulighed indtræffer, vil den af disse udgjorte Mængde aabenbart være et aabent konvekst Omraade, som tilhører $\bar{I}(y_{n+1})$; Begrænsningen for dette Omraade vil være en konveks Jordankurve i_{n+1}, som falder helt indenfor y_{n+1}, og Σ^*_{n+1} vil være sammensat af de to Omraader $Y(y_{n+1})$ og $I(i_{n+1})$. Hermed er den opstillede Sætning bevist.

Findes der i Planen ingen Punkter, for hvilke den første eller den anden Mulighed indtræffer, men vel Punkter, for hvilke Kurven $P - \omega_{n+1}$ enten tilhører Omraadet $\bar{I}(i_n)$ eller tilhører Omraadet $\bar{Y}(y_n)$, idet den omslutter y_n, vil det være praktisk at medregne den af disse Punkter udgjorte Mængde, der bestaar enten af et enkelt Punkt eller af Punkterne af et afsluttet Liniestykke, til Begrænsningen for Σ_{n+1} som en Rand i det Indre. Dette Tilfælde danner en Overgang mellem de to mulige Typer af Mængder Σ_{n+1}. Et Punkt P af Σ_{n+1} vil med denne udvidede Definition af Randen da og kun da være et indre Punkt for Σ_{n+1}, naar Kurven $P - \omega_{n+1}$ indeholder indre Punkter af Σ_n (eller for $n = 0$ skærer ω_0).

Betegner b_n, $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ en Bue paa Kurven ω_n, kan man paa tilsvarende Maade betragte de Mængder $\Sigma'_0 = b_0$, $\Sigma'_1 = b_0 + b_1, \ldots, \Sigma'_N = \sum_{n=0}^{N} b_n, \ldots$, som fremkommer ved Addition af Buerne $b_0, b_1, \ldots, b_N, \ldots$. Man viser let, at disse Punktmængder vil være sammenhængende Mængder maalelige i JORDAN'sk Forstand. Denne Bemærkning kommer vi senere til at anvende.

5. Lad $P_0, P_1, \ldots, P_N, \ldots$ være en Følge af Punkter i Planen. Den uendelige Række $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ skal da siges at være konvergent, og dens Sum at være Punktet P, saafremt det ved Rækkens Afsnit bestemte Punkt $\sum_{n=0}^{N} P_n$ for $N \to \infty$ nærmer sig til det entydig bestemte Grænsepunkt P. Lad $M_0, M_1, \ldots, M_N, \ldots$ være en Følge af Punktmængder i Planen. Den uendelige Række $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ skal siges at være konvergent, saafremt *enhver* uendelig Række $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$, hvor P_n, $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ er et Punkt af Mængden M_n, er konvergent; Mængden M af de ved disse Rækker fremstillede Punkter skal betegnes som den givne Rækkes Sum.

Er $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergent, er det muligt svarende til ethvert Tal $\varepsilon > 0$ at bestemme et positivt helt Tal $N_0 = N_0(\varepsilon)$, saaledes, at for ethvert Tal $N \geqq N_0$ og ethvert positivt helt Tal p Mængden $\sum_{n=N+1}^{N+p} M_n$ er beliggende helt indenfor en Cirkel med Begyndelsespunktet O som Centrum og Radius ε; vi udtrykker dette ved at sige, at den uendelige Række $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$, hvor P_n gennemløber Punktmængden M_n, er *ligelig konvergent*. I modsat Fald maatte der nemlig eksistere et bestemt Tal $e > 0$ og en Følge af hele positive Tal $N_1 < N_1 + p_1 < N_2 < N_2 + p_2 < \ldots < N_R < N_R + p_R < \ldots$ saaledes, at Mængderne $\sum_{n=N_r+1}^{N_r+p_r} M_n$, $r = 1, 2, \ldots, R, \ldots$ alle indeholdt Punkter udenfor eller paa Randen af Cirklen med O som Centrum og Radius e; men dette vilde umiddelbart føre til Konstruktion af en divergent Række $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$, hvor P_n, $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ tilhørte Mængden M_n.

Lad $\delta_{N,p}$ betegne øvre Grænse for Afstanden fra Begyndelsespunktet til et Punkt af Mængden $\sum_{n=N+1}^{N+p} M_n$ og lad δ_N betegne øvre Grænse for $\delta_{N,p}$, naar p gennemløber de hele positive Tal; da udsiger den fundne Sætning, at Størrelsen δ_N konvergerer mod Nul, naar N vokser ud over alle Grænser. Heraf følger specielt, at den største Afstand fra Begyndelsespunktet til et Punkt af Mængden M_n vil konvergere mod Nul for $n \to \infty$.

Endvidere følger let, at hvis $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ er konvergent, og enhver af Punktmængderne M_n er beliggende helt i det endelige, da vil Punktmængden $M = \sum_{n=0}^{\infty} M_n$ ligeledes være beliggende helt i det endelige. Forudsætter man yderligere om Punktmængderne M_n, at de er afsluttede Mængder, viser man let, at ogsaa Mængden M er en afsluttet Punktmængde.

6. Lad $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N, \ldots$ være en Følge af lukkede konvekse Kurver, og lad Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \tag{3}$$

være konvergent. Kurverne ω_n er helt i det endelige beliggende afsluttede Punktmængder. Summen Σ af Rækken (3) er derfor ligeledes afsluttet og beliggende helt i det endelige. Vi vil vise, *at Punktmængden* Σ ligesom Rækkens Afsnit $\Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} \omega_n$ *enten bestaar af et enkelt afsluttet konvekst Omraade* $\bar{I}(y)$ *eller af et afsluttet konvekst Omraade* $\bar{I}(y)$ *minus et aabent konvekst Omraade* $I(i)$.

Lad Q_n, $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ være et fast Punkt paa Kurven ω_n. I Stedet for at addere Kurverne ω_n vil vi addere de parallelforskudte Kurver $\omega'_n = \omega_n - Q_n$, som alle gaar gennem Begyndelsespunktet. Idet Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n$ er konvergent, har vi

$$\Sigma - \sum_{n=0}^{\infty} Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega_n - Q_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega'_n = \Sigma';$$

Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \omega'_n$ er altsaa konvergent, og dens Sum Σ' fremgaar af Σ ved en Parallelforskydning. Afsnittene i Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \omega'_n$ betegner vi $\Sigma'_0, \Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_N, \ldots$; de danner en voksende Følge af Mængder. Ethvert Punkt i Planen, som for et eller andet n tilhører Σ'_n, vil ogsaa tilhøre Σ'; Punktmængden Σ' vil derfor kunne bestemmes som det afsluttede Hylster for Grænsemængden for Σ'_n for $n \to \infty$.

Komplementærmængden Σ'^* til Σ' udgøres af de Punkter i Planen, som tillige med en vis Omegn tilhører Komplementærmængden $\Sigma_n'^*$ til Σ_n' for alle $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$. Punktmængden $\Sigma_n'^*$ bestaar enten af et enkelt Omraade $Y(y_n')$, hvor y_n' er en konveks Jordankurve, eller af to Omraader $Y(y_n')$ og $I(i_n')$, hvor y_n' og i_n' er konvekse Jordankurver, af hvilke den første omslutter den sidste. Omraaderne $Y(y_n')$ danner en aftagende Følge. Et Punkt P, som tilhører samtlige Mængder $\Sigma_n'^*$, kan enten tilhøre samtlige Omraader $Y(y_n')$ eller samtlige disse Omraader til et vist Trin og dernæst samtlige Omraader $I(i_n')$. Det kan ikke først tilhøre et Omraade $I(i_n')$ og dernæst for et større n et Omraade $Y(y_n')$. Mængden $\Sigma_y'^*$ af Punkter, som tillige med en vis Omegn tilhører samtlige Omraader $Y(y_n')$, vil være komplementær til det afsluttede Hylster for den Mængde, som bestaar af samtlige Punkter, som for et eller andet n tilhører $\bar{I}(y_n')$. Denne Mængde er konveks; betegner vi dens Begrænsning y' vil $\Sigma_y'^*$ være identisk med det ydre Omraade for den konvekse Kurve y'. Tilhører ethvert Punkt af Σ'^* samtlige Omraader $Y(y_n')$, er Σ'^* identisk med $\Sigma_y'^*$, Punktmængden Σ' følgelig med det afsluttede konvekse Omraade $\bar{I}(y')$. I modsat Fald bestaar Σ'^* foruden af Omraadet $Y(y')$ af en Punktmængde $\Sigma_i'^*$ bestaaende af de Punkter, som tillige med en vis Omegn tilhører samtlige Omraader $Y(y_n')$ til et vist Trin og dernæst samtlige Omraader $I(i_n')$. Denne Mængde vil være den aabne Kærne for Mængden af Punkter, som tilhører samtlige Omraader $Y(y_n')$ til et vist Trin og dernæst samtlige Omraader $I(i_n')$. Denne Mængde er sikkert konveks; betegner vi dens Begrænsning i', er Omraadet $I(i')$ identisk med Mængden $\Sigma_i'^*$. Mængden Σ' bestaar i dette Tilfælde af det afsluttede Omraade $\bar{I}(y')$ minus det aabne Omraade $I(i')$.

Hermed er den opstillede Sætning bevist.

Et Punkt i Planen, som tillige med en vis Omegn tilhører samtlige Mængder Σ_n', vil være et indre Punkt af Σ'. Benytter man dette som Definition, opnaar man i særlige Tilfælde, hvor Σ begrænses af en enkelt konveks Kurve, i Lighed med ovenfor en Udvidelse af Randen af Σ til ogsaa at omfatte et afsluttet Liniestykke i det Indre af Σ.

7. Vi vil endnu, med særligt Henblik paa en senere Anvendelse (§ 47), foretage en Almindeliggørelse af Begrebet Sum af en uendelig Række $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ til ogsaa at omfatte visse *divergente Rækker*.

Lad os for ethvert N og ethvert positivt Tal p med $\Sigma_{N,\,N+p}$ betegne Summen $\sum_{n=N+1}^{N+p} \omega_n$ af Kurverne $\omega_{N+1}, \ldots, \omega_{N+p}$. De Rækker $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$, som vi vil betragte, er dem, for hvilke det er muligt svarende til ethvert tilstrækkelig stort N (d. v. s. ethvert $N \geq N_0$) at bestemme et helt Tal $p_0 = p_0(N)$ og et positivt Tal ϱ_N, som konvergerer mod Nul for $N \to \infty$, saaledes at for ethvert $p \geq p_0$ Mængden $\Sigma_{N,\,N+p}$ indeholder Punkter af den afsluttede Cirkelskive Γ_N med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius ϱ_N. For konvergente Rækker er denne Betingelse sikkert opfyldt; vælger vi $\varrho_N = \delta_N$ (se § 5) vil endda for ethvert p samtlige Punkter af $\Sigma_{N,\,N+p}$ tilhøre Γ_N.

For ethvert $N \geq N_0$ betragter vi Mængden Σ_N' af Punkter af Σ_N, hvis Afstand fra Randen for Σ_N opfattet i den i § 4 angivne udvidede Betydning er større end $2\varrho_N$; for tilstrækkelig store N eksisterer denne Mængde og er en aaben Mængde begrænset enten af en enkelt konveks Kurve y'_N eller af to konvekse Kurver y'_N og i'_N. Betegner P et Punkt af Σ'_N, indeholder for ethvert Punkt Q af $P+\Gamma_N$ og ethvert $p \geqq p_0$ Mængden $Q-\Sigma_{N,N+p}$ Punkter af Σ_N. Cirkelskiven $P+\Gamma_N$ tilhører altsaa det Indre af samtlige Mængder Σ_{N+p} med $p \geqq p_0$. Da $\varrho_{N+p} \to 0$ for $p \to \infty$ følger heraf, at Mængden Σ'_N tilhører samtlige Mængder Σ'_{N+p} fra et vist Trin. Heraf følger nu uden Vanskelighed ved Hjælp af den i forrige Paragraf anvendte Betragtning, at der vil eksistere en bestemt Grænsemængde Σ' for Σ'_N for $N \to \infty$ bestemt ved Mængden af Punkter, som for et eller andet N tilhører den tilsvarende Mængde Σ'_N og bestaaende enten af et enkelt aabent konvekst Omraade (som nu ikke behøver at være begrænset) eller af et aabent konvekst Omraade minus et afsluttet konvekst Omraade, som specielt kan udarte til et Punkt eller til et ret Liniestykke. Denne Mængde Σ' vil være identisk med Mængden af Punkter, som tillige med en vis Omegn tilhører det Indre for samtlige Mængder Σ'_N fra et vist Trin; thi ethvert Punkt, for hvilket dette er Tilfældet, vil aabenbart for et tilstrækkelig stort N tilhøre Σ'_N. Det afsluttede Hylster for den fundne Grænsemængde Σ' betegner vi som *Summen* Σ *af den uendelige Række* $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$; Randen for Σ' skal være Randen for Σ. Af Karakteriseringen af de indre Punkter for Σ fremgaar, at den indførte Sum for konvergente Rækker stemmer overens med den sædvanlige.

KAPITEL II.

Indledende Definitioner og Sætninger om Sandsynlighed.

Inden vi i næste Kapitel afgrænser det Omraade af plane konvekse Kurver, som vi vil lægge til Grund for Undersøgelsen af Sandsynligheder ved Addition af konvekse Kurver, skal vi i dette Kapitel indføre nogle af de Begreber, som kommer til at spille en Rolle i det følgende. Vi vil definere, hvad vi vil forstaa ved en Sandsynlighedsfordeling paa en konveks Kurve, og vi vil se, hvorledes man ved Addition af konvekse Kurver, paa hvilke der er givet bestemte Sandsynlighedsfordelinger, kan komme til at tale om Sandsynlighedsfordelinger paa de ved Additionen fremkomne Punktmængder, samt indenfor visse Grænser undersøge disses Egenskaber. Disse Betragtninger gennemføres naturligst for almindelige konvekse Kurver. Da vi imidlertid kun kommer til at anvende dem paa Kurver af det afgrænsede Omraade, har vi ikke lagt Vægt paa at give Undersøgelsen væsentlig større Almindelighed, end det for disse Anvendelser er nødvendigt.

Buesandsynlighed og Mængdesandsynlighed paa en konveks Kurve.

8. Vi betragter en konveks Jordankurve ω (se Fig. 4). Lad der være givet en Funktion $f(b)$ defineret for enhver Bue b paa ω, ω selv medregnet, for hvilken det gælder, at dens Værdi er den samme, enten vi betragter en aaben Bue eller de Buer, der fremkommer af den ved Tilføjelse enten af et af Endepunkterne eller af begge. Funktionen siges at være *kontinuert*, saafremt stedse $f(b')$ konvergerer mod $f(b)$, naar den variable Bue b' konvergerer mod den faste Bue b paa ω. Den siges at være *additiv*, saafremt stedse $f(b_1) + f(b_2) = f(b_0)$, naar b_1 og b_2 er to Buer, der ligger i hinandens Forlængelse og tilsammen udgør Buen b_0. Der findes Funktioner af den betragtede Art, der er saavel kontinuerte som additive, f. Eks. Buelængden paa Kurven.

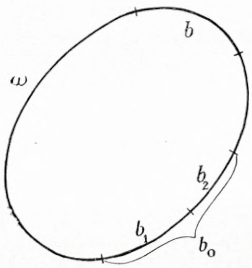

Fig. 4.

Lad os nu om en saadan Funktion yderligere antage, at den stedse er positiv, og at dens Værdi svarende til selve Kurven er 1. Lad os betegne den

$$w(b).$$

Denne Funktion bestemmer da, hvad vi vil kalde en *kontinuert Buesandsynlighed paa den givne konvekse Kurve*, som fremkommer, idet vi for enhver Bue b af ω betegner den tilsvarende Funktionsværdi $w(b)$ som Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Punkt P af ω falder paa Buen b.

Da Funktionen er additiv og stedse positiv, maa vi for enhver ægte Bue b paa ω have $0 < w(b) < 1$. Visheden for, at Punktet P tilhører ω, er udtrykt i Forudsætningen $w(\omega) = 1$. Additiviteten giver Udtryk for Reglen om Sandsynligheders Addition, idet den viser, at Sandsynligheden for, at et Punkt P af ω enten tilhører den ene eller den anden af to Buer b_1 og b_2, der ligger i hinandens Forlængelse, er Summen af Sandsynlighederne for, at det tilhører hver af de to Buer.

Lad os betragte et bestemt Punkt P_0 af ω (se Fig. 5), og lad Punktet P_1 gennemløbe Kurven i en bestemt Retning fra P_0 til P_0. For enhver Stilling af P_1 betragter vi Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Punkt af ω tilhører den allerede gennemløbne Bue P_0P_1. Denne Sandsynlighed er, opfattet som Funktion af P_1, kontinuert og stedse

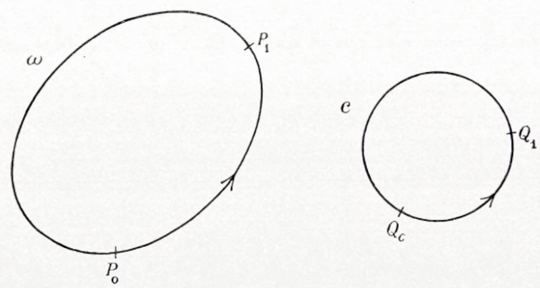

Fig. 5.

voksende. Den vokser fra 0 til 1, naar P_1 gennemløber ω. Lad os nu betragte en Cirkel c med Omkreds 1, paa hvilken der er givet et fast Punkt Q_0, og lad Q_1 være et Punkt, som gennemløber c i en bestemt Retning fra Q_0 til Q_0. Lader vi dette Punkt følges med Punktet P_1, saaledes at Længden af den af Q_1 gennemløbne Bue stadig er lig med den til Buen $P_0 P_1$ paa ω svarende Sandsynlighed, opnaar vi en enentydig og kontinuert Afbildning af ω paa c. Til enhver Bue paa ω svarer ved denne Afbildning en Bue paa Cirklen, hvis Længde er den til den givne Bue svarende Sandsynlighed. Omvendt ser man, at enhver enentydig og kontinuert Afbildning af Kurven ω paa en Cirkel med Omkreds 1 vil definere os en Buesandsynlighed paa Kurven af den betragtede Art. Indfører vi som Parameter θ paa Cirkelperiferien Længden af Buen $Q_0 Q_1$ fra det faste Punkt Q_0 til det variable Punkt Q_1, fremkommer en Afbildning af Kurven paa Parameterintervallet $0 \leqq \theta < 1$, som lige saa vel som Afbildningen paa Cirklen er egnet til Beskrivelse af Buesandsynligheden paa Kurven.

9. Denne Fremstilling af Sandsynlighedsfordelingen paa Kurven giver Anledning til Betragtning af Sandsynligheder svarende ikke blot til Buer, men almindeligere til alle Punktmængder paa Kurven, for hvilke den tilsvarende Mængde af Parameterværdier er maalelig, idet Sandsynligheden svarende til en saadan Mængde m ligefrem sættes lig med Maalet $w(m)$ af denne Punktmængde. Ved maalelig forstaar vi her som ogsaa stedse i det følgende maalelig i JORDAN'sk Forstand, ved en Punktmængdes Maal dens JORDAN'ske Maal. Naar vi opererer med dette Maal og ikke med det langt mere fintmærkende LEBESGUE'ske, skyldes det dels, at det om alle de Mængder, vi kommer til at betragte, gælder, at de er maalelige allerede i JORDAN'sk Forstand, dels, at den foreliggende Undersøgelse som en Undersøgelse over kontinuerte Funktioner bevæger sig paa klassisk Grund og ikke paa noget Punkt forudsætter de LEBESGUE'ske Teorier. Idet Maalet for et Liniestykke simpelthen er Liniestykkets Længde, ser vi, at denne nye Definition fremtræder som en naturlig Udvidelse af den oprindelige. Den indførte Mængdefunktion betegnes som en *Mængdesandsynlighed paa den givne konvekse Kurve.*

Mængdesandsynligheder i Planen.

10. Lad der i en Plan med fastlagt Begyndelsespunkt O være givet en Følge

(1) $$\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_N,\ \ldots$$

af konvekse Jordankurver. Vi vil betragte de ovenfor definerede Punktmængder

(2) $$\Sigma_0 = \omega_0,\ \Sigma_1 = \omega_0 + \omega_1,\ \ldots,\ \Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} \omega_n,\ \ldots,$$

der fremkommer, naar Kurverne adderes i den opskrevne Rækkefølge.

Lad os antage, at der paa hver af Kurverne ω_n er givet en Mængdesandsynlighed $w_n(m)$ af den ovenfor betragtede Art bestemt ved en Afbildning af Kurven paa et Parameterinterval $0 \leqq \theta_n < 1$. Dette fører umiddelbart til en Afbildning af hver af Mængderne Σ_N paa Enhedsterningen Q_N $(0 \leqq \theta_n < 1)$ i det tilsvarende $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$-Rum, idet vi lader et Punkt P af Σ_N svare til et Punkt $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ af Q_N, naar de til Koordinaterne θ_n for dette Punkt svarende Punkter P_n af de enkelte Kurver ω_n har Summen P. Hvert Punkt af Q_N faar ved denne Afbildning netop et tilsvarende Punkt i Σ_N, medens (for $N \geqq 1$) den overvejende Del af Σ_N's Punkter svarer til flere Punkter af Q_N.

Ved Hjælp af denne Afbildning kan vi nu definere en *Mængdesandsynlighed i Σ_N-Planen.* Lad os betragte en Punktmængde M i denne Plan. Svarende til denne betragter vi Mængden Ω af Punkter i Q_N, hvis tilsvarende Punkt i Σ_N tilhører Mængden M. Saafremt denne Mængde Ω er maalelig (i JORDAN'sk Forstand), betegner vi dens Maal

$$W_N(M)$$

som *Sandsynligheden for, at det vilkaarlige Punkt P af Σ_N tilhører M.* Vi har stedse $0 \leqq W_N(M) \leqq 1$. Til Σ_N selv svarer selve Q_N, som er maalelig og har Maalet 1. Dette udtrykker Visheden for, at Punktet P tilhører Σ_N. Endvidere gælder Reglen om Sandsynligheders Addition. Har vi to Mængder M_1 og M_2 i Σ_N-Planen uden noget fælles Punkt, til hvilke der svarer bestemte Sandsynligheder $W_N(M_1)$ og $W_N(M_2)$, vil der til Foreningsmængden $M_0 = M_1 + M_2$ af de to Mængder svare den bestemte Sandsynlighed $W_N(M_0) = W_N(M_1) + W_N(M_2)$. Thi til M_0 svarer en Delmængde Ω_0 af Q_N, der kan dannes som Foreningsmængde af de til M_1 og M_2 svarende Mængder Ω_1 og Ω_2. Disse er begge maalelige og har intet Punkt fælles. Heraf følger imidlertid at ogsaa Ω_0 er maalelig, og at dens Maal $W_N(M_0)$ er Summen $W_N(M_1) + W_N(M_2)$ af Maalene for Ω_1 og Ω_2.

Af Hensyn til en senere Anvendelse bemærker vi, at Mængdesandsynligheden $W_N(M)$, ligesom Punktmængden Σ_N selv, er uafhængig af den Orden, hvori vi har adderet Kurverne $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N$. Punktmængden Ω i den $N+1$-dimensionale Enhedsterning, hvis Maal vi benyttede som Definition paa Sandsynligheden for, at et Punkt P af Σ_N tilhørte Mængden M i Σ_N-Planen, vil nemlig ved Omordning af Kurverne blive erstattet med en Mængde Ω^* kongruent med Ω. Thi Omordningen af Kurverne $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N$ svarer simpelthen til en Omordning af Koordinaterne $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$. De to Mængder Ω og Ω^* vil følgelig samtidig være maalelige og altid med samme Maal.

11. Af Reglen om Sandsynlighedernes Addition fremgaar først rigtig det berettigede i at kalde de betragtede Mængdefunktioner $W_N(M)$ Sandsynligheder. Den viser tillige, at vi kan faa et Overblik over Sandsynlighedsfordelingerne, selv om vi indskrænker os til kun at betragte særlig simple Punktmængder i Planen, idet vi altid ved Sammensætning af disse kan naa til mere komplicerede. Vi vil gennemføre Betragtningerne for det Tilfælde, at disse Punktmængder er *Rektangler,* idet vi herved forstaar Punktmængder, som i et passende retvinklet Koordinatsystem (XY) kan fremstilles ved Uligheder af Formen $x_0 \leqq x < x_1$, $y_0 \leqq y < y_1$.

Vi vil alene betragte det Tilfælde, hvor *ingen af Kurverne* ω_n *indeholder rette Liniestykker*. Lad der i Planen være givet et fast retvinklet Koordinatsystem (XY), og lad os undersøge Mængdesandsynlighederne $W_N(M)$ for akseparallelle Rektangler $R(x_0 \leqq x < x_1, y_0 \leqq y < y_1)$ i dette System.

Vi vil vise, at der *for ethvert* N *eksisterer en bestemt Rektangelsandsynlighed* $W_N(R)$, *defineret for alle de betragtede Rektangler*, om hvilken det gælder, at der *til ethvert Tal* $\varepsilon > 0$ *svarer et Tal* $\delta > 0$, *saaledes at for ethvert Rektangel, hvis Areal er mindre end* δ, *den tilsvarende Sandsynlighed er mindre end* ε. Heraf vil specielt følge, at Funktionen $W_N(R)$ er *kontinuert*, d. v. s. at $W_N(R')$ vil konvergere mod $W_N(R)$, naar R' er et akseparallelt Rektangel, der konvergerer mod R. Thi R' vil gaa over i R ved Addition eller Subtraktion af (højst) fire akseparallelle Rektangler, hvis Areal konvergerer mod Nul. Endvidere vil vi vise, at $W_N(R)$ *da og kun da er positiv, naar* R *i sit Indre indeholder et Punkt af* Σ_N.[1]

Vi fører Beviset for den opstillede Sætning ved Induktion. Lad os først betragte Tilfældet $N = 0$, hvor Mængden Σ_0 er identisk med den konvekse Kurve ω_0, Enhedstærningen Q_0 med Intervallet $0 \leqq \theta_0 < 1$. Punktmængden Ω af Q_0, som svarer til et Rektangel R i Σ_0-Planen, bestaar øjensynlig af et endeligt Antal Intervaller, thi de Punkter af ω_0, som tilhører R, danner et endeligt Antal (højst fire) Buer paa Kurven. Sandsynligheden $W_0(R)$ eksisterer altsaa sikkert. Lige saa klart er det, at denne Sandsynlighed maa være mindre end en vilkaarlig positiv Størrelse ε, naar blot Rektanglets Areal er mindre end en tilsvarende positiv Størrelse δ. Thi er Rektanglets Areal mindre end δ, er mindst en af dets Sider mindre end $\sqrt{\delta}$, og δ kan vælges saa lille, at Sandsynligheden svarende til de højst to Buer, som en Parallelstrimmel af Bredden $\sqrt{\delta}$ har fælles med ω_0, er mindre end ε uafhængig af Parallelstrimlens Beliggenhed. Dette følger af vor Forudsætning, at ω_0 ingen rette Liniestykker indeholder. Heraf følger ogsaa, at $W_0(R)$ da og kun da er positiv, naar R i sit Indre indeholder Punkter af ω_0.

Vi antager nu Sætningen rigtig for et eller andet N og vil herudfra vise dens Rigtighed ogsaa for $N+1$. Lad (se Fig. 6) R betegne et bestemt akseparallelt Rektangel. Vi betragter den tilsvarende Punktmængde Ω i den $N+2$-dimensionale Enhedsterning Q_{N+1}. Vi skal vise, at denne Punktmængde er maalelig. Samtidig vil vi angive et Udtryk for dens Maal $W_{N+1}(R)$ ved Hjælp af Funktionen W_N. Punktmængden Σ_{N+1} bestemmes som $\Sigma_{N+1} = \Sigma_N + \omega_{N+1}$. Lad P betegne Midtpunktet af R og lad P_{N+1} være et Punkt af ω_{N+1}. De Punkter af Σ_N, som ved Addition af Punktet P_{N+1} giver Punkter af Σ_{N+1}, som tilhører R, maa alle tilhøre det Rektangel $R - P_{N+1}$, som fremkommer af R, naar man parallelforskyder det Vektoren $-OP_{N+1}$. Gennemløber P_{N+1} Kurven ω_{N+1}, vil Midtpunktet $P - P_{N+1}$ for dette Rektangel gennemløbe Kurven $P - \omega_{N+1}$. For ethvert Punkt $P - P_{N+1}$ af denne Kurve betragter

[1] Det følgende Bevis er hentet fra en Afhandling af H. Bohr og R. Courant: Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemann'sche Zetafunktion. Journ. f. Math. Bd. 144. (1914), hvor det dog kun er gennemført for et specielt Tilfælde.

vi nu den tilsvarende Rektangelsandsynlighed $W_N(R-P_{N+1})$. Denne Sandsynlighed er ifølge vor Antagelse en kontinuert Funktion af Rektanglet $R-P_{N+1}$, følgelig ogsaa af dets Midtpunkt $P-P_{N+1}$. Det vil atter sige, at den er en kontinuert Funktion af Parameteren θ_{N+1} for Punktet P_{N+1} paa ω_{N+1}. Vil vi vise, at dens Integral

$$I=\int_0^1 W_N(R-P_{N+1})\ d\theta_{N+1}$$

netop bestemmer Rektangelsandsynligheden $W_{N+1}(R)$.

Lad os med A_i og A_y betegne henholdsvis det indre og det ydre Maal for Punktmængden Ω. For at vise, at Ω er maalelig med Maalet I, er det tilstrækkelig at vise, at for ethvert $\varepsilon>0$

$$I-\varepsilon<A_i;\quad A_y<I+\varepsilon.$$

Thi da $A_i\leq A_y$ følger heraf $A_i=A_y=I$.

For at vise, at dette er Tilfældet, betragter vi to med R fast forbundne akseparallelle Rektangler R_i og R_y, ligeledes med Midtpunkt P, af hvilke det førstes Rand falder indenfor, det andets udenfor R. R_i-P_{N+1} og R_y-P_{N+1} betegner disse Rektangler parallelforskudt Vektoren $-OP_{N+1}$. Ifølge Antagelse kan vi vælge R_i og R_y saa nær ved R, at for *ethvert* P_{N+1}

(3) $\quad W_N(R-P_{N+1})-\dfrac{\varepsilon}{2}<W_N(R_i-P_{N+1});\ W_N(R_y-P_{N+1})<W_N(R-P_{N+1})+\dfrac{\varepsilon}{2}.$

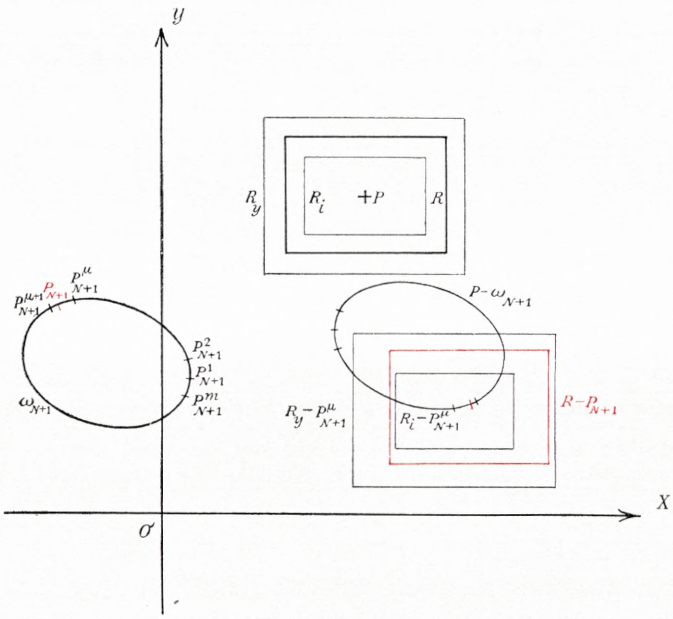

Fig. 6.

Lad os nu betragte en Række efter hinanden følgende Punkter $P^1_{N+1}, P^2_{N+1},\ldots, P^m_{N+1}, P^{m+1}_{N+1}=P^1_{N+1}$ paa Kurven ω_{N+1}. Lad os med $\Delta^{\mu}\theta_{N+1}$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ betegne Sandsynligheden svarende til Buen $P^{\mu}_{N+1}\,P^{\mu+1}_{N+1}$ paa ω_{N+1}. Størrelsen

$$\sum_{\mu=1}^{m} W_N(R-P^{\mu}_{N+1})\ \Delta^{\mu}\theta_{N+1}$$

giver os en Tilnærmelsesværdi for Integralet I. Vi bestemmer nu Punkterne $P^1_{N+1}, P^2_{N+1},\ldots, P^m_{N+1}, P^{m+1}_{N+1}=P^1_{N+1}$ saaledes, at for det første

(4) $$\left|\,I-\sum_{\mu=1}^{m} W_N(R-P^{\mu}_{N+1})\ \Delta^{\mu}\theta_{N+1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

for det andet Rektanglet $R-P_{N+1}$, for ethvert Punkt P_{N+1} af Buen $P^{\mu}_{N+1}\,P^{\mu+1}_{N+1}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m$) paa ω_{N+1}, indeholder Rektanglet $R_i - P^{\mu}_{N+1}$ svarende til Buens Begyndelsespunkt P^{μ}_{N+1}, medens det indeholdes i Rektanglet $R_y - P^{\mu}_{N+1}$. Dette sidste vil altid være Tilfældet, naar blot Længden af hver Bue $P^{\mu}_{N+1}\,P^{\mu+1}_{N+1}$ paa ω_{N+1} er mindre end den mindste Afstand fra et Punkt af Randen for R til et Punkt af Randen for R_i eller R_y.

Da er det indre og ydre Maal for den Del af Ω, for hvilken Koordinaten θ_{N+1} svarer til Punkter af Buen $P^{\mu}_{N+1}\,P^{\mu+1}_{N+1}$, mindst lig med $W_N(R_i - P^{\mu}_{N+1})\,\Delta^{\mu}\theta_{N+1}$, højst lig med $W_N(R_y - P^{\mu}_{N+1})\,\Delta^{\mu}\theta_{N+1}$. Følgelig er

$$\sum_{\mu=1}^{m} W_N(R_i - P^{\mu}_{N+1})\,\Delta^{\mu}\theta_{N+1} \leqq A_i\,; \quad A_y \leqq \sum_{\mu=1}^{m} W_N(R_y - P^{\mu}_{N+1})\,\Delta^{\mu}\theta_{N+1}.$$

Ved Anvendelse af (3) følger heraf

$$\sum_{\mu=1}^{m} W_N(R - P^{\mu}_{N+1})\,\Delta^{\mu}\theta_{N+1} - \frac{\varepsilon}{2} < A_i\,; \quad A_y < \sum_{\mu=1}^{m} W_N(R - P^{\mu}_{N+1})\,\Delta^{\mu}\theta_{N+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

og, ved Hjælp af (4),

$$I - \varepsilon < A_i\,; \quad A_y < I + \varepsilon,$$

hvormed Eksistensen af $W_{N+1}(R)$ og samtidig Identiteten

$$W_{N+1}(R) = \int_0^1 W_N(R - P_{N+1})\,d\,\theta_{N+1} \tag{5}$$

er bevist.

Heraf følger umiddelbart den anden Del af den opstillede Sætning; thi er $W_N(R) < \varepsilon$ for ethvert Rektangel, hvis Areal er mindre end δ, er ogsaa $W_{N+1}(R) < \varepsilon$ for ethvert saadant Rektangel. Anderledes formuleret udsiger denne Del af Sætningen, at Rektangelsandsynligheden gaar *ligelig* mod Nul med Rektanglets Areal. Den sidste Bemærkning viser da, at Ligelighedsgraden ikke forringes ved Overgang fra N til $N+1$; *en en Gang opnaaet Regelmæssighed i Sandsynlighedsfordelingen bevares under den fortsatte Addition af konvekse Kurver.*

Endelig viser Identiteten (5) Rigtigheden af den i Sætningens sidste Del udtalte Paastand, at $W_{N+1}(R)$ da og kun da er positiv, naar R i sit Indre indeholder Punkter af Σ_{N+1}. Thi dette er ensbetydende med, at mindst et af Rektanglerne $R - P_{N+1}$ i sit Indre indeholder Punkter af Σ_N, altsaa ifølge Forudsætning ensbetydende med, at den kontinuerte Funktion $W_N(R - P_{N+1})$ under Integraltegnet for mindst en Værdi af Parameteren θ_{N+1} er positiv. Men det er netop Betingelsen for, at Integralet er positivt. Hermed er den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

Forudsætningen om, at de betragtede Kurver ikke indeholder rette Liniestykker, er, som man kan vise, uden Betydning for Eksistensen af Rektangelsandsynlighederne $W_N(R)$. Derimod er den nødvendig for i Almindelighed at sikre os, at disse bliver kontinuerte.

Vi skal i Kapitel IV vende tilbage til Spørgsmaalet om Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af konvekse Kurver, men under speciellere Forudsætninger end de hidtil anvendte. Udfra den Antagelse, at Sandsynlighederne paa de enkelte Kurver er differentiable Mængdefunktioner med kontinuerte Differentialkvotienter, og følgelig lader sig fremstille som Integraler af kontinuerte »Punktsandsynligheder«, vil vi vise, at ogsaa de paa Grundlag af disse indførte Mængdesandsynligheder i Planen bliver differentiable med kontinuerte Differentialkvotienter og saaledes ogsaa kan fremstilles som Integraler af kontinuerte Punktsandsynligheder. Dette bliver dog, som det allerede fremgaar af den sidste Bemærkning, først muligt, naar vi giver Afkald paa at betragte vilkaarlige konvekse Kurver. Afgrænsningen af Kurveomraadet giver Anledning til almindeligere Betragtninger over lukkede konvekse Kurver. Da disse er af en ret afrundet Karakter, har vi af systematiske Grunde samlet dem i et selvstændigt Kapitel III.

KAPITEL III.

Afgrænsning af Kurveomraadet.

Indre og ydre Radius for en konveks Jordankurve.

12. Lad (se Fig. 7) ω være *en konveks Jordankurve uden Knæk, som ikke indeholder noget ret Liniestykke.* I ethvert Punkt P af Kurven findes en bestemt Tangent t, som kun har det ene Punkt P fælles med Kurven, og som varierer kontinuert med P. Vi betragter samtlige Cirkler, som rører t i P, og som falder paa samme Side af t som ω; deres Centrer udfylder Halvnormalen n til t i P. Som Grænsetilfælde medregnes blandt Cirklerne Punktet P selv og Linien t. Blandt de af disse Cirkler, som har den Egenskab, at deres Indre tilhører det Indre af ω, findes en største, som vi betegner $\gamma_i(P)$; dens Radius betegner vi $\varrho_i(P)$; $\varrho_i(P)$ vil normalt være et positivt Tal, men kan i udartede Tilfælde være Nul. Paa samme Maade findes der blandt de af Cirklerne, hvis Ydre tilhører det Ydre af ω, en mindste, som vi betegner $\gamma_y(P)$; dens Radius betegner vi $\varrho_y(P)$; $\varrho_y(P)$ vil normalt være endelig, men kan i udartede Tilfælde være uendelig. Vi lader nu P gennemløbe ω og bestemmer nedre Grænse r_i for alle $\varrho_i(P)$, øvre Grænse r_y for alle $\varrho_y(P)$. *Størrelserne r_i og r_y betegnes henholdsvis som indre og ydre Radius for den givne Kurve ω.*

Ved den fortsatte Undersøgelse af Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af konvekse Kurver vil vi indskrænke os til at betragte saadanne Kurver, hvis Radier tilfredsstiller Betingelserne

$$(1) \qquad \underline{0 < r_i\,; \quad r_y < \infty.}$$

Disse Kurver skal siges at udgøre *Klassen K.* Gennem ethvert Punkt P af en Kurve af Klassen K kan der (se Fig. 8) lægges to egentlige Cirkler $c_i(P)$ og $c_y(P)$ med Radier r_i og r_y, saaledes at ethvert indre Punkt for $c_i(P)$ er indre Punkt for ω, ethvert ydre Punkt for $c_y(P)$ er ydre Punkt for ω, og dette er ikke muligt for nogen større Radius end r_i og nogen mindre Radius end r_y[1]. Omvendt vil enhver Jordankurve ω, for hvilken dette er Tilfældet, tilhøre Klassen K og vil have de tilsvarende Radier r_i og r_y; thi i ethvert Punkt P af ω vil Cirklerne $c_i(P)$ og $c_y(P)$ have samme Tangent, og denne Tangent vil være en Støttelinie for ω; men en Jordankurve, som har den Egenskab, at der gennem hvert af dens Punkter gaar en Støttelinie til Kurven, er, som vi i § 2 har set, konveks. Betingelserne (1) udelukker, at Kurven kan have Knæk eller indeholde rette Liniestykker.

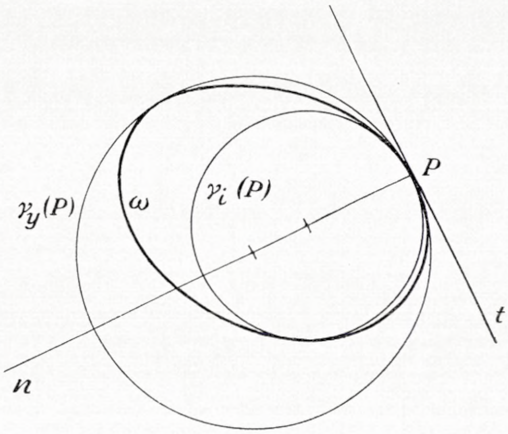

Fig. 7.

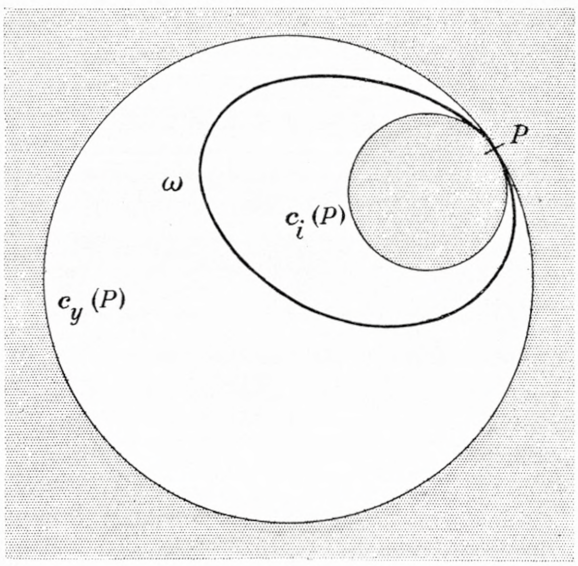

Fig. 8.

Ved de følgende Betragtninger over Kurver af Klassen K vil vi stedse komme til at anvende den her givne Definition af indre og ydre Radius. Drejer det sig imidlertid om at afgøre, hvorvidt en paa Forhaand forelagt Kurve er af Klassen K, kan Definitionen virke noget upraktisk. Vi vil derfor nøjere se, hvad det er den dækker, og saaledes naa til andre Bestemmelser af Radierne r_i og r_y.

Oskulationscirkler og Krumningscirkler.

13. Lad ω være en konveks Jordankurve uden Knæk, som ikke indeholder rette Liniestykker. Bestemmelsen af dens indre og ydre Radius efter den ovenfor givne Definition fordrer en Betragtning af Kurvens

[1] Kinematisk er Radierne r_i og r_y bestemt henholdsvis som Radius i den største Cirkel, som kan rulle i ω, og som Radius i den mindste Cirkel, hvori ω kan rulle.

Forløb »i det Store«; vi vil vise, hvorledes denne Betragtning gennem Indførelsen af Begreberne Oskulationscirkel og Krumningscirkel kan erstattes med en Betragtning af Kurvens Forløb »i det Smaa«.

Lad P være et Punkt af ω, t Tangenten i P. Som *Oskulationscirkel* til ω i Punktet P betegnes enhver Cirkel, der kan fremkomme som Grænsecirkel for en Følge af Cirkler, der rører t i P, og som indeholder et Punkt af ω forskellig fra P, der konvergerer mod P. Findes der saadanne Følger af Cirkler, hvis Radier enten gaar mod Nul eller vokser ud over alle Grænser, regner vi enten Punktet P selv eller Tangenten t for Oskulationscirkel i Punktet.

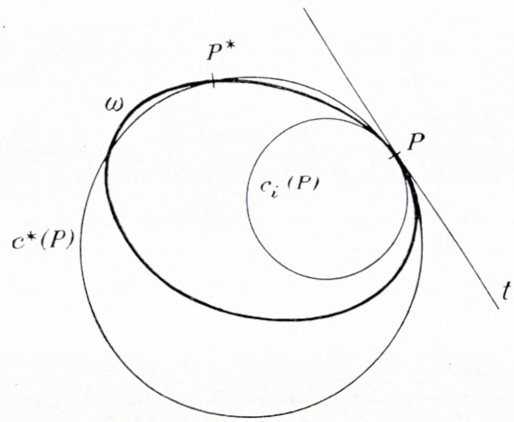

Fig. 9.

Vi vil vise, at *indre og ydre Radius for den givne Kurve bestemmes henholdsvis som nedre og øvre Grænse for Radierne i samtlige Kurvens Oskulationscirkler*, at der m. a. O., naar disse Grænser betegnes henholdsvis r_i^o og r_y^o, gælder de to Relationer

$$r_i = r_i^o; \quad r_y = r_y^o. \tag{2}$$

Vi vil nøjes med at bevise den første Relation.

Lad (se Fig. 9) P være et vilkaarligt Punkt af ω, t Tangenten i P; vi betragter Cirklen $c_i(P)$ med Radius r_i, som rører t i P og falder paa samme Side af t som ω. Den aabne Cirkelskive $I(c_i(P))$ tilhører Omraadet $I(\omega)$. Lad $c(P)$ med Radius $r(P)$ være en Oskulationscirkel til ω i Punktet P bestemt som Grænsestilling for en Følge af Cirkler $c^*(P)$, der rører t i P, og som indeholder et Punkt P^* af ω, der konvergerer mod P. For Radius $r^*(P)$ i enhver af disse Cirkler har vi

$$r^*(P) \geqq r_i;$$

heraf følger imidlertid straks ved Grænseovergangen, at ogsaa

$$r(P) \geqq r_i.$$

Da dette gælder for enhver Oskulationscirkel til ω, er $r_i^o \geqq r_i$.

Vi vil nu vise, at ogsaa omvendt $r_i^o \leqq r_i$. Lad os (se Fig. 10) for et vilkaarligt Punkt P af ω betragte den Cirkel $c_i^o(P)$ med Radius r_i^o, som rører Tangenten t til ω i P og falder paa samme Side af t som ω; vi vil vise, at det Indre af denne Cirkel tilhører Omraadet $I(\omega)$; hermed vil Beviset for den opstillede Sætning være fuldført.

Lad q være en Cirkel med Radius $\varrho < r_i^o$, som rører $c_i^o(P)$ indvendig i P. Fjerner vi Punktet P af q, fremkommer den »opskaarne« Cirkel q. Ethvert Punkt af $I(c_i^o(P))$ tilhører for en passende Værdi af ϱ denne opskaarne Cirkel. Den af ω begrænsede afsluttede konvekse Mængde $\bar{I}(\omega)$ har t til Støttelinie. Lad Q være et Punkt af den opskaarne Cirkel q. Halvlinien h fra P gennem Q har et afsluttet Liniestykke PR fælles med $\bar{I}(\omega)$. Naar Q gennemløber den opskaarne Cirkel q fra P til P, vil PR efterhaanden optage ethvert Punkt af $\bar{I}(\omega)$ og bortset fra P hvert Punkt netop en Gang. R vil altsaa gennemløbe Kurven ω opskaaret i Punktet P. Vi betragter nu *Liniestykket* QR regnet med Fortegn positivt bort fra P. *Det varierer kontinuert med* Q. Vi vil vise 1. *at det i mindst et Punkt er positivt;* 2. *at det aldrig bliver Nul.* Heraf vil følge, at QR har konstant Fortegn og altsaa stedse er positivt; men det vil atter sige, at Q stedse er indre Punkt af $\bar{I}(\omega)$ og følgelig ligger indenfor ω.

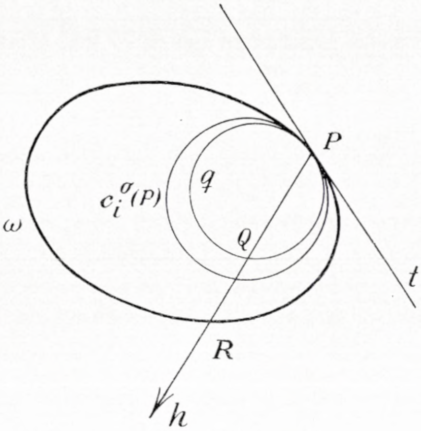

Fig. 10.

1. (Fig. 11). Lad P^* og Q^* være to Punkter af ω og q forskellige fra P med den fælles Projektion T^* paa t. Lad P^*, Q^*, T^* konvergere mod P. Da er

$$\frac{1}{2}\lim\frac{(PT^*)^2}{T^*Q^*} = \varrho < r_i^{\sigma} \leqq \frac{1}{2}\lim\inf\frac{(PT^*)^2}{T^*P^*}.$$

Vi kan altsaa bestemme et positivt Tal ε saaledes, at $T^*Q^* > T^*P^*$ naar blot $PT^* < \varepsilon$. De saaledes bestemte Punkter P^* falder udenfor q; lad R være et af dem, og lad Halvlinien h fra P gennem R skære q i Q; da er QR positiv.

2. (Fig. 12). For at vise, at q og ω kun har det ene Punkt P fælles, betragter vi i Almindelighed Mængden D af fælles Punkter for q og ω. Denne Mængde er afsluttet; den maa være endelig, thi i modsat Fald havde den et Fortætningspunkt, i hvilket q og ω havde samme Tangent, og hvori q var en oskulerende Cirkel for ω; men det kan ikke indtræffe. Lad os nu antage, at D indeholdt andre Punkter end P. Lad S være et saadant, hvis Afstand fra P er den mindst mulige. En af Buerne PS paa q er $\leqq \pi$ og indeholder kun de to Punkter P og S af D. Vi betegner den q^*. Linien PS har kun de to Punkter P og S fælles med ω. Disse Punkter begrænser to aabne Buer ω^* og ω^{**} paa ω, hvoraf den ene, ω^*, falder paa samme Side af Linien PS som q^*, den anden, ω^{**}, paa den modsatte Side. I Omegnen af P falder ω^* udenfor q; den falder altsaa helt udenfor q. Gennem S trækkes en Linie s parallel med t. Halvtangenten til ω^* i Punktet S kan ikke falde udenfor Parallelstrimlen t, s; thi da Tangenten til ω i S er Støttelinie for ω, vilde dette medføre, at Buen ω^{**} tilhørte den aabne Parallelstrimmel t, s; i Omegnen af P falder denne Bue udenfor q, i Omegnen af S vilde den falde indenfor q; den vilde følgelig have et Punkt fælles med q, som laa P nærmere end S, men et saadant eksisterer

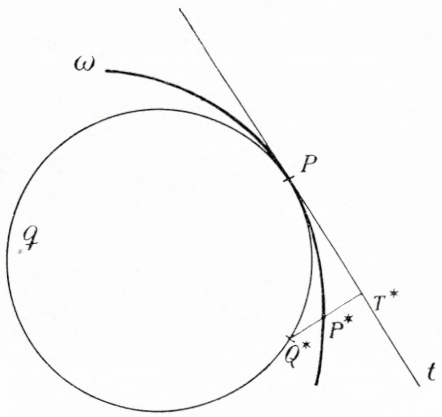

Fig. 11.

ikke. Heraf følger da, at *Buen* ω^* *tilhører den aabne Parallelstrimmel* t, s. Vi betragter nu et Punkt U^*, som gennemløber den afsluttede Bue ω^*. Gennem U^* trækker vi en Halvlinie u^* parallel med den fælles negative Halvtangent for q^* og ω^* i P. Den skærer q^* i et Punkt V^*. Længden af Liniestykket U^*V^* er en kontinuert Funktion af U^*; den er positiv for alle indre Punkter af Buen, Nul i P og S; den antager da sit Maksimum i et indre Punkt U af Buen. Det tilsvarende Punkt V er et indre Punkt af q^*. Parallelforskyder vi nu ω^* Stykket UV til Stillingen ω_1^*, kommer U til at falde i V, og alle Punkter U^* i en vis Omegn af U kommer til at falde indenfor eller paa q. Tangenten til q i V bliver Tangent til ω_1^*. Nu viser imidlertid et Ræsonnement nøjagtig som det under 1. anstillede, at alle Punkter af ω_1^* i en vis Omegn af V tvært imod falder udenfor q. Hermed er vi naaet til en Modstrid, og Beviset for den opstillede Sætning er fuldført.

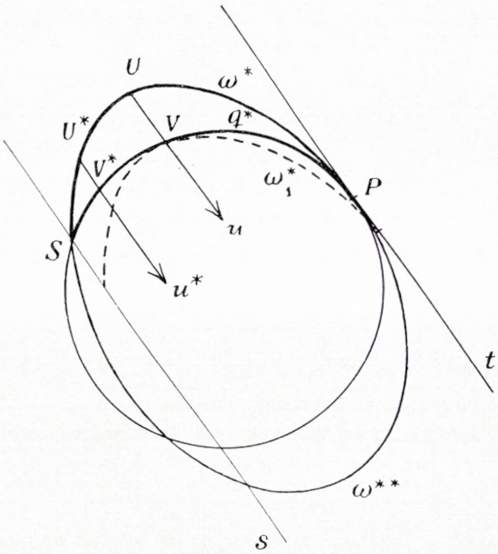

Fig. 12.

14. Lad P være et Punkt af den givne Kurve ω, t Tangenten i P. Lad P^* være et Punkt af ω forskellig fra P, som konvergerer mod P, og lad t^* være ω's Tangent i P^*. Vi betragter Forholdet $\dfrac{PP^*}{\angle (tt^*)}$ mellem Korden PP^* og Totalkrumningen $\angle (tt^*)$ for den forsvindende Bue PP^* af ω. Som *Krumningscirkel* til ω i Punktet P betegner vi da enhver Cirkel, der rører t i P og falder paa samme Side af t som ω, og hvis Radius, der betegnes som *Krumningsradius* i Punktet, kan fremkomme som Grænseværdi for Størrelsen $\dfrac{PP^*}{\angle (tt^*)}$.

Begreberne Oskulationscirkel og Krumningscirkel er ikke sammenfaldende. Vi vil imidlertid vise, at det i fuldkommen Analogi med den ovenfor beviste Sætning gælder, at *indre og ydre Radius i den givne Kurve* ω *bestemmes som nedre og øvre Grænse for samtlige Kurvens Krumningsradier*[1]. Betegner vi disse Grænser r_i^k og r_y^k, gælder m. a. O. de to Relationer

(3) $$r_i = r_i^k;\quad r_y = r_y^k.$$

Vi vil nøjes med at bevise den første Relation.

Er $r_i = 0$ har vi sikkert $r_i^k \geqq r_i$. Vi vil vise, at det samme er Tilfældet naar $r_i > 0$. Lad (se Fig. 13) P være et vilkaarligt Punkt af ω, t Tangenten i P. Vi betragter Cirklen $c_i(P)$ med Radius r_i, hvis Indre $I(c_i(P))$ tilhører $I(\omega)$. Dens Centrum A_i falder paa Halvnormalen n til t i P. Gennem A_i trækkes en Linie t_i parallel

[1] Smlgn. W. Blaschke, Kreis und Kugel, (1916), S. 114—17.

med t. Lad R og S være de Punkter af ω, hvori Tangenten er vinkelret paa t; lad P^* være et Punkt af Buen RPS forskellig fra P, og lad t^* og n^* betegne Tangenten og Normalen til ω i P^*. n og n^* skærer hinanden i et Punkt Q^*. Lad nu yderligere P^* falde paa samme Side af t_i som P. Vi betragter Cirklen $c_i(P^*)$ med Radius r_i, hvis Indre $I(c_i(P^*))$ tilhører $I(\omega)$; den skærer ikke t. Dens Centrum A_i^* falder derfor paa den modsatte Side af t_i som t. Nu falder A_i^* tillige paa en Cirkel a_i^* med Centrum P^* og Radius r_i. Da $P^*A_i \geqq r_i$ vil samtlige Punkter af denne Cirkel, som falder paa modsat Side af t_i som t, falde paa samme Side af n som P^*. Halvlinien n^*, som gaar gennem A_i^*, skærer følgelig n i et Punkt paa Forlængelsen af PA_i ud over A_i, og vi har $PQ^* \geqq r_i$. Lader vi nu P^* konvergere mod P, faar vi

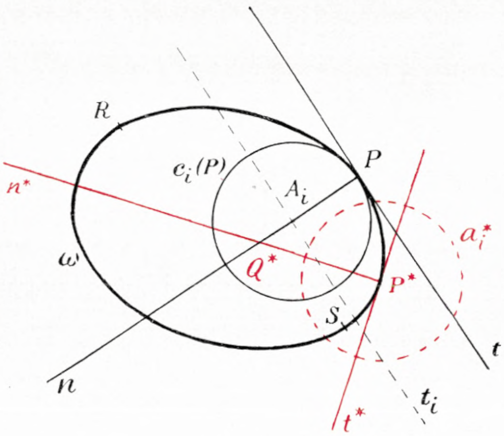

Fig. 13

$$\lim\inf \frac{PP^*}{\angle(tt^*)} = \lim\inf \frac{PP^*}{\angle(nn^*)}$$

$$= \lim\inf \frac{PP^*}{\sin(PQ^*P^*)} = \lim\inf \frac{PQ^*}{\sin(PP^*Q^*)} = \lim\inf PQ^* \geqq r_i .$$

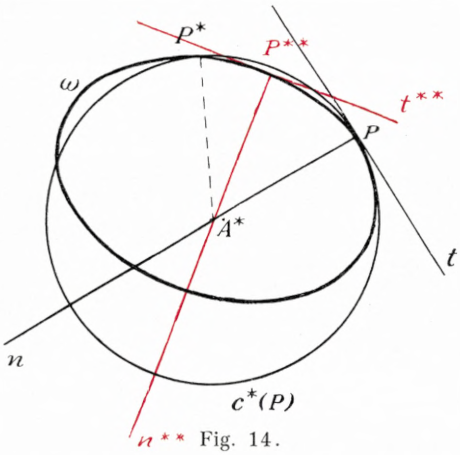

Fig. 14.

Men da P var et vilkaarligt Punkt af ω, følger heraf straks, at $r_i^k \geqq r_i$.

Vi vil nu vise, at ogsaa omvendt $r_i^k \leqq r_i$; hermed vil Beviset for den opstillede Sætning være fuldført. Ifølge den foregaaende Sætning er dette ensbetydende med, at $r_i^k \leqq r_i^o$. Vi viser Rigtigheden af denne Relation, idet vi viser, at *enhver Oskulationscirkel til en konveks Kurve tillige er Krumningscirkel til Kurven i samme Punkt*[1].

Lad (se Fig. 14) P være et Punkt af Kurven med Tangenten t, $c(P)$ en Oskulationscirkel i Punktet bestemt som Grænsestilling for en Følge af Cirkler $c^*(P)$, som rører t i P, og som gaar gennem et Punkt P^* af Kurven, som konvergerer mod P. Centrerne A^* for disse Cirkler falder paa den indadrettede Halvnormal n til Kurven i Punktet P. Radius $r(P)$ i $c(P)$ fremkommer som Grænseværdi for Radius $r^*(P) = PA^*$ i $c^*(P)$, naar P^* konvergerer mod P. Da $A^*P = A^*P^*$ vil der svarende til ethvert af de betragtede Punkter P^* findes et indre Punkt P^{**} af Buen PP^*, hvis Afstand fra A^* er enten mindst mulig eller

[1] J. Hjelmslev, Über die Grundlagen der kinematischen Geometrie, Acta math. 47, (1925), S. 155.

størst mulig. Lad Tangenten i dette Punkt være t^{**}; den indadrettede Halvnormal n^{**} i P^{**} gaar gennem A^*. Naar P^* konvergerer mod P, vil ogsaa P^{**} konvergere mod P, og vi faar

$$r(P) = \lim r^*(P) = \lim \frac{PA^*}{\sin(PP^{**}A^*)} = \lim \frac{PP^{**}}{\sin(PA^*P^{**})} = \lim \frac{PP^{**}}{\angle(nn^{**})} = \lim \frac{PP^{**}}{\angle(tt^{**})}.$$

Altsaa er $r(P)$ Krumningsradius, $c(P)$ Krumningscirkel til Kurven i Punktet P, og den opstillede Sætning er bevist.

15. Af de beviste Sætninger følger specielt, at

$$r_i^o = r_i^k; \quad r_y^o = r_y^k. \tag{4}$$

For enhver lukket konveks Kurve uden Knæk, som ikke indeholder rette Liniestykker, er nedre og øvre Grænse for Oskulationscirklernes Radier lig med nedre og øvre Grænse for Krumningscirklernes Radier. Vi vil vise, at den samme Sætning gælder for *vilkaarlige, aabne eller afsluttede, konvekse Buer.*

En konveks Bue uden Knæk, som ikke indeholder rette Liniestykker, kan altid deles i simple Buer, d. v. s. Buer, hvis Totalkrumning er mindre end eller lig med π. Vi kan derfor nøjes med at bevise Sætningen for saadanne Buer. Endvidere kan vi nøjes med at betragte afsluttede Buer; thi en aaben Bue vil altid være sammensat af en Følge af afsluttede Buer. Beviset føres nu simpelthen saaledes, at vi viser, at en afsluttet simpel Bue altid vil være Del af en konveks Jordankurve, som kan vælges saadan, at øvre og nedre Grænse for Radierne i Krumningscirklerne og Oskulationscirklerne er de samme for Jordankurven som for den givne Bue. Lad Buen være b, dens Endepunkter A og B. Er dens Totalkrumning netop π, vil vi ved til Buen at føje den Bue b', der fremgaar af b ved en Drejning paa 180^o omkring Midtpunktet af Liniestykket AB, faa en Jordankurve af den ønskede Art. Er Buens Totalkrumning mindre end π, kan den samme Metode anvendes, naar vi blot først gennem en passende Forlængelse af Buen ved Hjælp af kongruente Buer har forøget dens Totalkrumning til π.

Lad os paa en konveks Jordankurve ω betragte de to eventuelt flertydige Funktioner $r^o(P)$ og $r^k(P)$ af det variable Punkt P paa Kurven, som bestemmer Radierne henholdsvis i Oskulationscirklerne og i Krumningscirklerne i Punktet P. For ethvert Punkt P af ω vil Værdierne $r^o(P)$ udgøre en Delmængde af Værdierne $r^k(P)$. Lad os betragte Funktionen $r^o(P)$; for enhver aaben Bue b paa ω bestemmer vi nedre og øvre Grænse $r_i^o(b)$ og $r_y^o(b)$ for $r^o(P)$, naar P gennemløber b. Lad P_0 være et bestemt Punkt af Kurven ω; øvre Grænse for $r_i^o(b)$ for samtlige Buer b, som indeholder P_0, betegner vi $\varrho^o(P_0)$, nedre Grænse for $r_y^o(b)$ over disse Buer betegner vi $P^o(P_0)$. Funktionerne $\varrho^o(P)$ og $P^o(P)$ er entydige Funktioner paa Kurven ω. De betegnes henholdsvis som den nedre og den øvre *Limesfunktion* for Funktionen $r^o(P)$. Paa tilsvarende Maade defineres Limesfunktionerne $\varrho^k(P)$ og $P^k(P)$ for Funktionen $r^k(P)$. For enhver Bue b paa ω er

$$r_i^o(b) = r_i^k(b); \quad r_y^o(b) = r_y^k(b).$$

Følgelig er for ethvert Punkt P af ω

$$(5) \qquad \varrho^{o}(P) = \varrho^{k}(P); \quad P^{o}(P) = P^{k}(P).$$

Funktionerne $r^{o}(P)$ *og* $r^{k}(P)$ *har m. a. O. de samme Limesfunktioner.* Omvendt er denne Egenskab ved disse Funktioner tilstrækkelig til at sikre, at de paa enhver Bue har samme øvre og nedre Grænse.[1]

Sætninger om Skæringspunkter og Skæringsvinkler.

16. Lad der i en Plan med fastlagt Begyndelsespunkt O være givet to konvekse Jordankurver ω og ω^* *af Klassen* K (§ 12) med de tilsvarende Radier r_i og r_y og r_i^* og r_y^*, og lad os antage, at

$$(6) \qquad \underline{r_y \geqq r_i > r_y^* \geqq r_i^*}.$$

Lad P være et variabelt Punkt i Planen; for enhver Stilling af Punktet P betragter vi den Kurve $P + \omega^*$, som (§ 4) fremgaar af ω^* ved Parallelforskydningen OP.

Vi vil vise følgende Sætning: *Kurverne* ω *og* $P + \omega^*$ *har stedse højst to Punkter fælles. Rører de hinanden, er Røringspunktet det eneste fælles Punkt, og, omvendt, har Kurverne kun et fælles Punkt, rører de hinanden i dette Punkt.*

Vi indfører for Kurven $P + \omega^*$ den afkortede Betegnelse ω'.

Lad os først betragte det Tilfælde, hvor Kurverne ω og ω' kun har et Punkt Q fælles. ω' kan ikke indeholde saavel et Punkt R af $I(\omega)$ som et Punkt S af $Y(\omega)$, thi i saa Fald vilde der paa hver af de aabne Buer RS paa ω' findes et Punkt af ω. ω' maa altsaa, bortset fra Punktet Q, enten helt tilhøre Omraadet $I(\omega)$ eller Omraadet $Y(\omega)$. Men heraf følger umiddelbart, at ω og ω' i Punktet Q har samme Tangent.

Har omvendt ω og ω' Punktet Q fælles, og har de i dette Punkt samme Tangent t, kan de kun have det ene Punkt Q fælles. Falder Kurverne paa hver sin Side af t, er dette indlysende. Falder de paa samme Side af t, betragter vi (Fig. 15) de to Cirkler $c_i(Q)$ og $c'_y(Q)$ med Radier r_i og r_y^*, som rører t i Q, og som falder paa samme Side af t som ω og ω'. ω' tilhører den afsluttede Cirkelskive $\overline{I}(c'_y(Q))$; da $r_y^* < r_i$ tilhører denne bortset fra Punktet Q den aabne Cirkelskive $I(c_i(Q))$, som atter tilhører $I(\omega)$. ω' tilhører altsaa bortset fra Punktet Q Omraadet $I(\omega)$ og har saaledes kun det ene Punkt Q fælles med ω.

Vi gaar nu over til at betragte det Tilfælde, hvor ω og ω' har mere end et fælles Punkt. Kurverne kan ikke have samme Tangent i noget af de fælles Punkter. Heraf følger straks, at Kurverne maa have et endeligt Antal Punkter fælles. I modsat

[1] Med Hensyn til Rækkevidden af de i dette Afsnit beviste Sætninger bemærkes det, at Forudsætningen om den betragtede Kurve ω, at den hverken maatte have Knæk eller indeholde rette Liniestykker, forsaavidt er uvæsentlig, som man ved passende Definitioner let kan opnaa, at Resultaterne bliver almengyldige. Man maa blot i Stedet for Tangenter betragte Støttelinier til Kurven, i Stedet for Røringspunkter Støttepunkter, og man maa tage Hensyn til, at der gennem et Punkt af Kurven kan gaa flere Støttelinier, paa en Støttelinie til Kurven kan ligge flere Støttepunkter.

Fald havde nemlig Mængden af fælles Punkter et Fortætningspunkt, som ligeledes var et fælles Punkt for ω og ω', men i dette Punkt havde Kurverne samme Tangent.

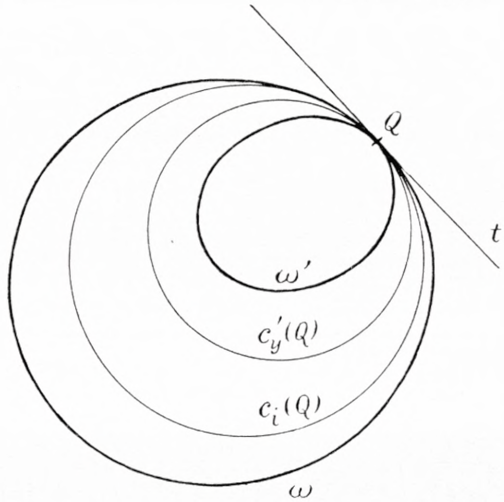

Fig. 15.

For at vise at Antallet af Skæringspunkter netop er to, antager vi, i den Hensigt at naa til en Modstrid, at der var flere, altsaa mindst tre. Disse Punkter deler ω i lige saa mange Buer. Højst en af disse Buer har en Totalkrumning $\geqq \pi$. Der vil altsaa sikkert findes to paa hinanden følgende Buer QR og RS (se Fig. 16), som begge har en Totalkrumning $< \pi$. Ingen af disse Buer har noget indre Punkt fælles med ω'. Bortset fra Endepunkterne maa Buerne følgelig hver for sig enten tilhøre Omraadet $I(\omega')$ eller Omraadet $Y(\omega')$; og de maa tilhøre hver sit af de to Omraader, thi ellers havde ω og ω' i Punktet R samme Tangent. Lad os antage, at det er Buen QR paa ω, som bortset fra Endepunkterne tilhører $Y(\omega')$. Vi betegner den b. Samtidig med denne Bue betragter vi den Bue QR paa ω', som ikke indeholder S. Vi betegner den b'. Linien QR har kun de to Punkter Q og R fælles med ω og ω'; den deler hver af Kurverne i to Buer, en paa hver Side af Linien. Buerne b og b' falder paa samme Side af Linien QR, nemlig begge paa den modsatte Side af QR som S.

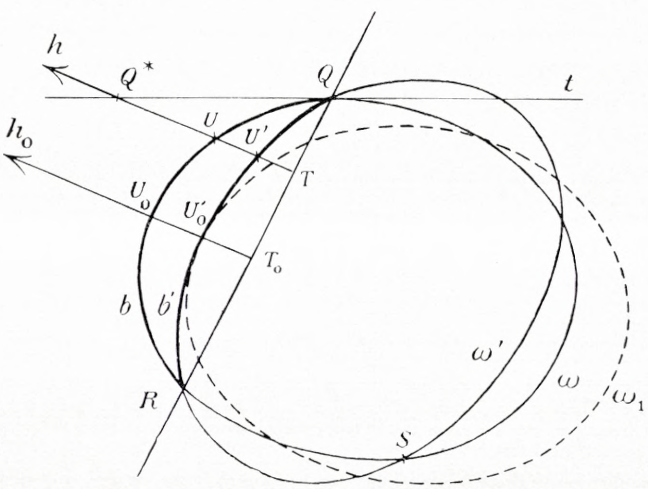

Fig. 16.

Lad T være et indre Punkt af Liniestykket QR, h en Halvlinie, som udgaar fra Punktet, og som er rettet ind i den Halvplan, begrænset af Linien QR, hvori b og b' ligger. Da Totalkrumningen for Buen b er $< \pi$, kan h vælges saaledes, at den *ikke er parallel med nogen Tangent til* b. T tilhører saavel $I(\omega)$ som $I(\omega')$. Halvlinien h vil derfor skære b og b' hver i netop et Punkt. Disse Punkter betegner vi U og U'. De er indre Punkter af b og b'. Punkterne T, U, U' er indbyrdes forskellige. De følger efter hinanden i Ordenen T, U', U paa h, thi det afsluttede Liniestykke TU' tilhører $\bar{I}(\omega')$, medens U tilhører $Y(\omega')$. Vi lader nu T gennemløbe det aabne Liniestykke

QR, medens vi holder Retningen af h fast. Længden af Liniestykket UU' er da en kontinuert Funktion af T. Konvergerer T mod et af Liniestykkets Endepunkter, f. Eks. Q, vil denne Funktion konvergere mod Nul. Thi Buen b falder paa samme Side af sin Tangent t i Q som T. Det betragtede Liniestykke UU' er derfor en Del af Liniestykket TQ^*, hvor Q^* er Skæringspunktet mellem h og t, og dette Liniestykke konvergerer mod Nul, naar T konvergerer mod Q. Funktionen har et Maksimum, som den antager for et Punkt T_0 af QR. Lad de tilsvarende Punkter paa b og b' være U_0 og U'_0. Vi parallelforskyder nu Kurven ω Stykket $U_0U'_0$ til Stillingen ω_1. Herved føres U_0 over i Punktet U'_0, medens Punkter af ω i en vis Omegn af U_0 føres over i Punkter indenfor eller paa ω'. Kurverne ω' og ω_1 faar altsaa samme Tangent i Punktet U'_0. Men da følger det af Ræsonnementet ovenfor, at ω_1 bortset fra Punktet U'_0 falder helt udenfor ω'. Hermed er vi naaet til en Modstrid, og Beviset er fuldført.[1]

17. Vi vil nærmere undersøge, for hvilke Punkter P i Planen Kurverne ω og $P+\omega^*$ har enten 0, 1 eller 2 Punkter fælles. Vi vil vise følgende Sætning:

Mængden af Punkter P, for hvilke ω og $P+\omega^*$ har netop et fælles Punkt, bestaar af to Jordankurver ω_i og ω_y, hvor ω_y omslutter ω_i. For ethvert Punkt P, som tilhører enten $I(\omega_i)$ eller $Y(\omega_y)$, har ω og $P+\omega^*$ intet Punkt fælles; for ethvert Punkt P, som tilhører saavel $Y(\omega_i)$ som $I(\omega_y)$, har ω og $P+\omega^*$ to Punkter fælles.

Mængden af Punkter P, for hvilke ω og $P+\omega^*$ har netop et fælles Punkt, betegner vi M_1. Lad P_1 være et Punkt af M_1, og lad ω og $P_1+\omega^*$ have det fælles Punkt P. Ifølge Sætningen ovenfor vil ω og $P_1+\omega^*$ i Punktet P have samme Tangent t. Kurven $P-\omega^*$, som fremgaar af $P_1+\omega^*$ ved en halv Omdrejning omkring Midtpunktet af Liniestykket PP_1, gaar gennem P_1; dens Tangent t_1 i P_1 er parallel med t.

Lad omvendt (se Fig. 17) P være et Punkt af ω med Tangenten t, og lad os paa Kurven $P-\omega^*$ bestemme de to Punkter, hvori Tangenten er parallel med t. I det ene Punkt P_i falder $P-\omega^*$ paa modsat Side af sin Tangent t_i som ω af t, i det andet Punkt P_y paa samme Side af Tangenten t_y som ω af t. Da tilhører saavel P_i som P_y Mængden M_1. Thi Kurverne $P_i+\omega^*$ og $P_y+\omega^*$ rører begge ω i Punktet P og har følgelig kun dette ene Punkt fælles med ω.

Lader vi P variere kontinuert paa ω, vil P_i og P_y variere kontinuert. Gennemløber P Kurven ω, vil P_i og P_y gennemløbe to lukkede Kurver uden Dobbeltpunkter, m. a. O. to Jordankurver ω_i og ω_y. ω_i og ω_y har ingen fælles Punkter; tilsammen udgør de Mængden M_1.

Mængden af Punkter P, for hvilke ω og $P+\omega^*$ ikke har noget fælles Punkt, betegner vi M_0, Mængden af Punkter, for hvilke disse Kurver har to fælles Punkter, betegner vi M_2. Saavel M_0 som M_2 er, som man uden Vanskelighed ser, aabne

---

[1] Vor Forudsætning (6) om Kurverne ω og ω^*, at $r_i > r^*_y$, kan (smlgn. § 14) siges at udtrykke, at Kurven ω er »helt igennem« svagere krummet end Kurven ω^*. Hensigten med Beviset ovenfor er at gøre den (i og for sig ikke overraskende) Kendsgerning øjensynlig, at af to simple konvekse Buer med fælles Endepunkter den stærkest krummede falder udenfor den svagere krummede.

Punktmængder. Ethvert Randpunkt for M_0 eller M_2 vil følgelig tilhøre M_1. Vi vil vise, at M_1 er den fælles Begrænsning for M_0 og M_2.

Vi betragter paany (Fig. 17) de to Punkter P_i og P_y af ω_i og ω_y, som svarer til et vilkaarligt Punkt P af ω med Tangenten t. Kurverne $P_i + \omega^*$ og $P_y + \omega^*$ rører begge t i P. Den første falder paa samme Side af t som ω, den anden paa den modsatte Side. At P_i er Randpunkt for M_0 følger af, at $P_i + \omega^*$ tilhører en afsluttet

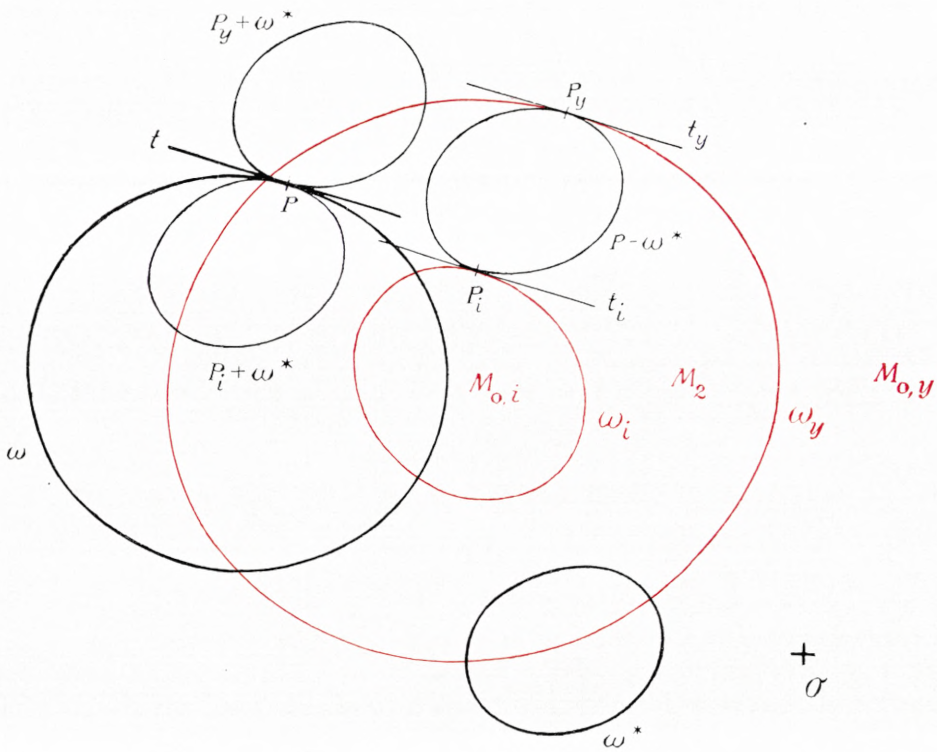

Fig. 17.

Cirkelskive med Radius r_y^*, som rører t i P, denne bortset fra Punktet P atter en aaben Cirkelskive med Radius r_i, som ligeledes rører t i P, og som tilhører Omraadet $I(\omega)$. En lille Forskydning af $P_i + \omega^*$ vinkelret paa t og bort fra t vil derfor bringe Kurven indenfor ω. At P_i er Randpunkt for M_2 følger af, at en lille Forskydning af $P_i + \omega^*$ den modsatte Vej vil bringe Kurven til Skæring med ω. At ogsaa P_y er Randpunkt saavel for M_0 som for M_2 følger af, at en lille Forskydning af $P_y + \omega^*$ vinkelret paa t og bort fra t vil bringe den udenfor ω, medens en lille Forskydning den modsatte Vej vil bringe den til Skæring med ω.

Det fremgaar af disse Betragtninger, at Kurven ω_i begrænser en Delmængde af M_0, nemlig Mængden $M_{0,i}$ af Punkter P, for hvilke Kurven $P + \omega^*$ tilhører $I(\omega)$; thi for et Randpunkt P_i for denne Mængde gælder det øjensynlig, at $P_i + \omega^*$ bortset fra et Punkt P

af ω tilhører $I(\omega)$, og, omvendt, tilhører $P_i + \omega^*$ bortset fra et Punkt P af ω Omraadet $I(\omega)$, er P_i et Randpunkt for $M_{0,i}$. Nu er $M_{0,i}$ en begrænset Mængde; følgelig er $M_{0,i} = I(\omega_i)$. Paa tilsvarende Maade ses, at ω_y begrænser en anden Delmængde af M_0, nemlig Mængden $M_{0,y}$ af Punkter P, for hvilke $P + \omega^*$ tilhører $Y(\omega)$. Nu er $M_{0,y}$ ikke begrænset; følgelig er $M_{0,y} = Y(\omega_y)$. De to Mængder $M_{0,i}$ og $M_{0,y}$, d. v. s. de to Omraader $I(\omega_i)$ og $Y(\omega_y)$, udgør tilsammen M_0; de har ingen Punkter fælles; følgelig er $I(\omega_i)$ en Delmængde af $\bar{I}(\omega_y)$; men heraf følger, at ω_y omslutter ω_i. Endelig ser vi, at M_2 vil bestaa af samtlige Punkter, som hverken tilhører $\bar{I}(\omega_i)$ eller $\bar{Y}(\omega_y)$, d. v. s. af samtlige Punkter, som tilhører saavel $Y(\omega_i)$ som $I(\omega_y)$. Hermed er den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

18. Vi vil nu vise, at *Kurverne ω_i og ω_y er konvekse Kurver af Klassen K, hvis Radier $r_{i,i}$, $r_{i,y}$ og $r_{y,i}$, $r_{y,y}$ tilfredsstiller Betingelserne*

$$(7)^1 \qquad \frac{r_i - r_y^* \leq r_{i,i}\,;\quad r_{i,y} \leq r_y - r_i^*}{r_i + r_i^* \leq r_{y,i}\,;\quad r_{y,y} \leq r_y + r_y^*.}$$

Vi vil nøjes med at gennemføre Beviset for Kurven ω_i.

Lad P_i være et vilkaarligt Punkt af ω_i; det svarer til et Punkt P af ω. Tangenterne t til ω i P og t_i til $P - \omega^*$ i P_i er parallelle. Paa den Halvnormal n_i til t_i i P_i, som falder paa samme Side af t_i som ω af t, bestemmer vi de to Punkter $A_{i,i}$ og $A_{i,y}$, hvis Afstand fra P_i er henholdsvis $r_i - r_y^*$ og $r_y - r_i^*$. Omkring $A_{i,i}$ og $A_{i,y}$ beskrives to Cirkler $c_{i,i}(P_i)$ og $c_{i,y}(P_i)$ med Radier $r_i - r_y^*$ og $r_y - r_i^*$. De rører t_i i P_i. For at vise den opstillede Sætning er det (smlgn. § 12) tilstrækkeligt at vise 1. at $I(c_{i,i}(P_i))$ tilhører $I(\omega_i)$, 2. at $Y(c_{i,y}(P_i))$ tilhører $Y(\omega_i)$.

1. (Fig. 18). Cirklen $c_i(P)$ med Radius r_i, som gaar gennem P, og for hvilken $I(c_i(P))$ tilhører $I(\omega)$, rører t i P. Dens Centrum A_i falder paa Halvnormalen n til t i P paa samme Side af t som ω. Paa Kurven ω^* betragter vi Punktet $P^* = P - P_i$ med Tangenten $t^* = P - t_i = t - P_i$. Cirklen $c_y^*(P^*)$ med Radius r_y^*, som gaar gennem P^*, og for hvilken $Y(c_y^*(P^*))$ tilhører $Y(\omega^*)$, rører t^* i P^*. Dens Centrum A_y^* falder paa Halvnormalen n^* til t^* i P^* paa samme Side af t^* som ω^*. Liniestykket OA_y^* er, som en simpel Betragtning viser, lig og parallel med Liniestykket $A_{i,i}\,A_i$.

Lad nu Q være et Punkt af $I(c_{i,i}(P_i))$; vi skal vise, at det tilhører $I(\omega_i)$. Det betyder ifølge det foregaaende, at Kurven $Q + \omega^*$ skal tilhøre $I(\omega)$. Kurven $Q + \omega^*$ tilhører den afsluttede Cirkelskive $\bar{I}(Q + c_y^*(P^*))$, hvis Centrum er $Q + A_y^*$. Dette Punkts Afstand fra A_i er lig med Afstanden fra Q til $A_{i,i}$, som er mindre end $r_i - r_y^*$. Cirkelskiven $\bar{I}(Q + c_y^*(P^*))$, hvis Radius er r_y^*, tilhører altsaa den aabne Cirkelskive $I(c_i(P))$, hvis Radius er r_i; denne tilhører atter $I(\omega)$. Følgelig tilhører $Q + \omega^*$ Omraadet $I(\omega)$, og Punktet Q er, som vi vilde vise, et indre Punkt for ω_i.

2. (Fig. 19). Cirklen $c_y(P)$ med Radius r_y, som gaar gennem P, og for hvilken

[1] Man viser yderligere, hvad vi dog ikke kommer til at anvende i det følgende, at

$$r_{i,i} \leq \frac{r_i - r_i^*}{r_y - r_y^*} \leq r_{i,y}\,;\quad r_{y,i} \leq \frac{r_i + r_y^*}{r_y + r_i^*} \leq r_{y,y}.$$

$Y(c_y(P))$ tilhører $Y(\omega)$, rører t i P; dens Centrum A_y falder paa Halvnormalen n til t i P paa samme Side af t som ω. Cirklen $c_i^*(P^*)$ med Radius r_i^*, som gaar gennem P^*, og for hvilken $I(c_i^*(P^*))$ tilhører $I(\omega^*)$, rører t^* i P^*. Dens Centrum A_i^* falder paa Halvnormalen n^* til t^* i P^* paa samme Side af t^* som ω^*. Liniestykket OA_i^* er lig og parallel med Liniestykket $A_{i,y}\,A_y$.

Vi skal vise, at Omraadet $Y(c_{i,y}(P_i))$ tilhører Omraadet $Y(\omega_i)$, eller at ω_i tilhører den afsluttede Cirkelskive $\bar{I}(c_{i,y}(P_i))$. Lad P_i' være et Punkt af ω_i. Vi skal vise, at dets Afstand fra $A_{i,y}$ højst er lig med $r_y - r_i^*$ eller, hvad der kommer ud paa det samme, at Afstanden fra Punktet $P_i' + A_i^*$ til Punktet A_y i det højeste er lig med $r_y - r_i^*$. Dette er ensbetydende med, at den aabne Cirkelskive $I(P_i' + c_i^*(P^*))$ tilhører $I(c_y(P))$. Nu tilhører den aabne Cirkelskive $I(P_i' + c_i^*(P^*))$ Omraadet $I(P_i' + \omega^*)$. Da P_i' er et Punkt af ω_i, tilhører $I(P_i' + \omega^*)$ Omraadet $I(\omega)$, som atter tilhører $I(c_y(P))$. Følgelig tilhører $I(P_i' + c_i^*(P^*))$ den aabne Cirkelskive $I(c_y(P))$, og Beviset for den opstillede Sætning er fuldført.

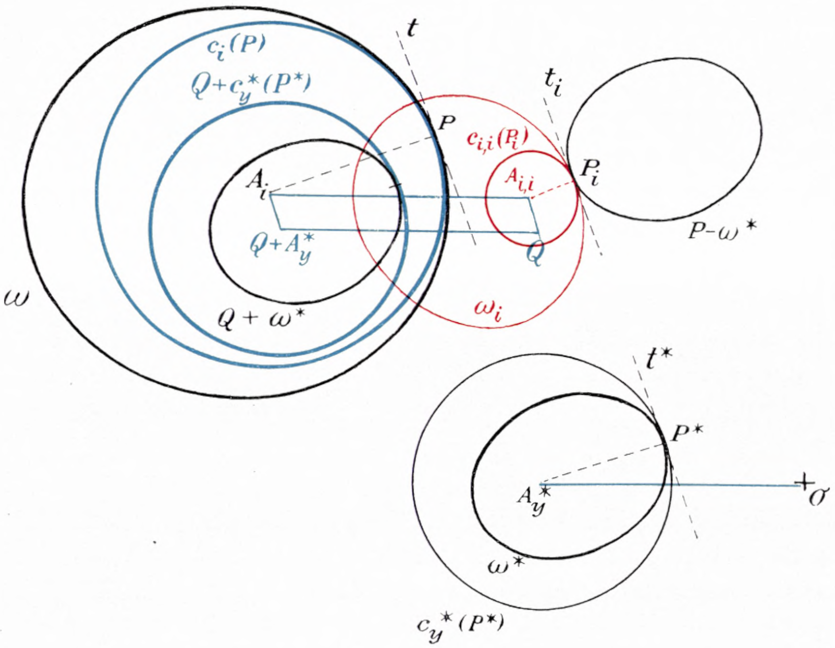

Fig. 18.

19. Vi betragter paany Mængden M_2 af Punkter P i Planen, for hvilke Kurverne ω og $P+\omega^*$ har to Punkter fælles. Lad (Fig. 20) P være et vilkaarligt Punkt af denne Mængde; de fælles Punkter for ω og $P+\omega^*$ betegner vi $P' = P + P^{*\prime}$ og $P'' = P + P^{*\prime\prime}$; $P^{*\prime}$ og $P^{*\prime\prime}$ er Punkter af ω^*. Punkterne P' og P'' er sikkert begge Skæringspunkter for ω og $P+\omega^*$; som Skæringsvinkler betegner vi de konvekse Vinkler p' og p'' mellem de indadrettede Halvnormaler til ω og $P+\omega^*$ i Punkterne P' og P''. Den mindste Afstand fra P til Begrænsningen for M_2 d. v. s. til et Punkt af ω_i eller ω_y betegner vi d; den er lig med den mindste Forskydning af Kurven $P+\omega^*$, som bringer den til at røre ω. Vi vil vise, at der for ethvert Punkt P af M_2 gælder de to Relationer

$$(8) \qquad \frac{\sqrt{d}}{\sin p'} < \sqrt{\frac{2\,r_i\,r_y^*}{r_i - r_y^*}}; \quad \frac{\sqrt{d}}{\sin p''} < \sqrt{\frac{2\,r_i\,r_y^*}{r_i - r_y^*}}.$$

Vi kan nøjes med at bevise den første Relation. Vi betragter Cirklerne $c_i(P')$ og $c_y(P')$ med Radier r_i og r_y, som rører ω i P' og falder paa samme Side af Tangenten i P' som ω selv. Deres Centrer betegner vi henholdsvis A_i' og A_y'. Endvidere betragter vi Cirklen $c_y^*(P^{*\prime})$ med Radius r_y^*, som rører ω^* i $P^{*\prime}$ og falder paa samme Side af Tangenten til ω^* i $P^{*\prime}$ som ω^*. Dens Centrum betegner vi $A_y^{*\prime}$. Cirklen

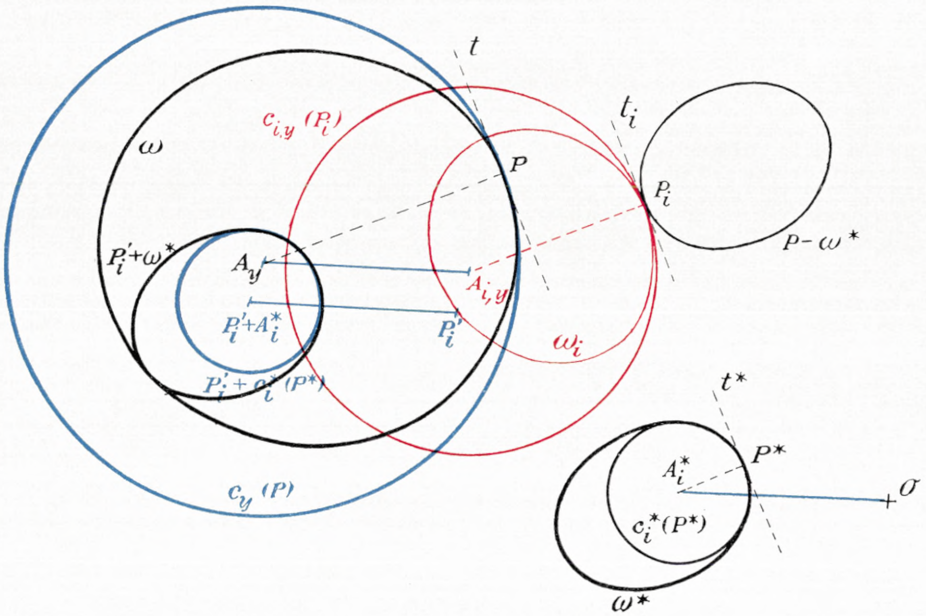

Fig. 19.

$P+c_y^*(P^{*\prime})$ har sit Centrum i Punktet $P+A_y^{*\prime}$; den skærer $c_i(P')$ og $c_y(P')$ i P' under Vinklen p'.

Vi parallelforskyder Cirklen $P+c_y^*(P^{*\prime})$ langs Liniestykket $P+A_y^{*\prime}\,A_i'$, til den kommer til at røre $c_i(P')$ indvendig. Herved kommer $P+\omega^*$ til at falde indenfor ω, P følgelig til at falde indenfor ω_i. Længden d_i' af Forskydningen er derfor mindst lig med Afstanden d_i fra P til ω_i. Ved Betragtning af Trekanten $P+A_y^{*\prime}\,P'\,A_i'$, hvori Vinklen ved P' er p' og Siden $P+A_y^{*\prime}\,A_i'$ har Længden $d_i'+r_i-r_y^*$, faas nu

$$2\,r_i\,r_y^*\sin p' = \sqrt{(2\,r_i+d_i')\,(2\,r_i-2\,r_y^*+d_i')\,(2\,r_y^*-d_i')\,d_i'}$$

hvoraf, da $d_i' \geqq d_i \geqq d$

$$\frac{\sqrt{d}}{\sin p'} < \frac{k_i}{\sqrt{2\,r_y^*-d_i'}},$$

hvor $k_i = \dfrac{r_i\,r_y^*}{\sqrt{r_i(r_i-r_y^*)}}$.

Paa samme Maade ses, at den Parallelforskydning d_y' af Cirklen $P + c_y^*(P^{*\prime})$ langs Forlængelsen af Liniestykket $A_y'\ P + A_y^{*\prime}$ ud over $P + A_y^{*\prime}$, som bringer den til at røre $c_y(P')$ udvendig, vil bringe $P + \omega^*$ til at falde udenfor ω og følgelig P til at falde udenfor ω_y, saaledes at d_y' bliver større end eller lig med Afstanden d_y fra

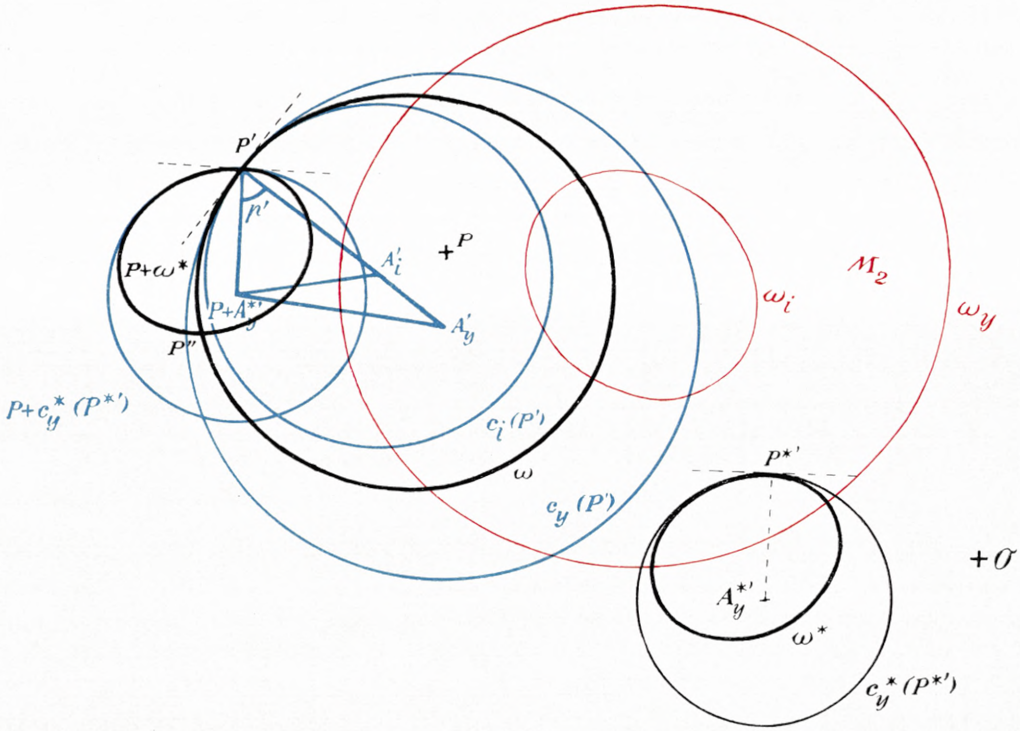

Fig. 20.

P til ω_y. Ved Betragtning af Trekanten $P + A_y^{*\prime}\ P'\ A_y'$, hvori Vinklen ved P' er p' og Siden $P + A_y^{*\prime}\ A_y'$ har Længden $r_y + r_y^* - d_y'$, faas nu

$$2\,r_y\,r_y^* \sin p' = \sqrt{(2\,r_y + 2\,r_y^* - d_y')\ (2\,r_y - d_y')\ (2\,r_y^* - d_y')\ d_y'}$$

hvoraf, da $d_y' \geqq d_y \geqq d$ og $d_y' < 2\,r_y^*$

$$\frac{\sqrt{d}}{\sin p'} < \frac{k_y}{\sqrt{2\,r_y^* - d_y'}},$$

hvor $k_y = \dfrac{r_y\,r_y^*}{\sqrt{r_y(r_y - r_y^*)}}$.

Nu er for ethvert Punkt P af M_2 i hvert Fald den ene af Størrelserne $2\,r_y^* - d_i'$

og $2r_y^* - d_y'$ større end f. Eks. $\frac{r_y^*}{2}$. Thi

1. er $p' \leqq \frac{\pi}{2}$ har man

$$(d_i' + r_i - r_y^*)^2 \leqq r_y^{*2} + r_i^2 < r_y^* r_i + r_i^2 < \left(\frac{r_y^*}{2} + r_i\right)^2,$$

altsaa $d_i' + r_i - r_y^* < \frac{r_y^*}{2} + r_i$ og $2r_y^* - d_i' > \frac{r_y^*}{2}$; og

2. er $p' > \frac{\pi}{2}$ har man

$$r_y + r_y^* - d_y' > r_y \text{ og } 2r_y^* - d_y' > r_y^*.$$

Da nu $r_y \geqq r_i > r_y^*$ har man $k_i \geqq k_y$. Det fremgaar da af de fundne Uligheder, at for ethvert Punkt P af M_2

$$\frac{\sqrt{d}}{\sin p'} < \frac{k_i}{\sqrt{\frac{r_y^*}{2}}} = \sqrt{\frac{2\, r_i\, r_y^*}{r_i - r_y^*}},$$

hvormed den opstillede Sætning er bevist.

Parallelkurver til en konveks Kurve.

20. Lad (se Fig. 21) ω være en konveks Jordankurve af Klassen K med Radierne r_i og r_y. Lad P være et vilkaarligt Punkt af Kurven med Tangenten t. Normalen n til t i P tænkes orienteret saaledes, at den regnes positiv bort fra ω. Lad δ være et vilkaarligt reelt Tal. Med $P(\delta)$ betegner vi det Punkt af n, hvis Afstand fra P regnet med Fortegn i Overensstemmelse med den angivne Orientering er δ. Gennemløber P Kurven ω, vil $P(\delta)$ gennemløbe en Kurve $\omega(\delta)$, som vi betegner *Parallelkurven til ω i Afstanden δ*. Vi har $\omega(0) = \omega$; er δ negativ, betegnes $\omega(\delta)$ som en indre Parallelkurve til ω; er δ positiv, betegnes $\omega(\delta)$ som en ydre Parallelkurve til ω.

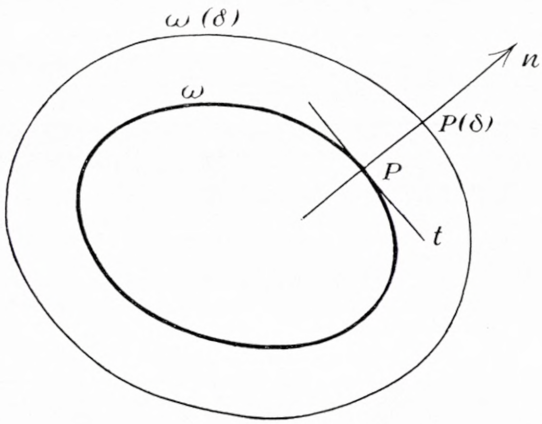

Fig. 21

Lad ϱ være et positivt Tal mindre end r_i, og lad os betragte Parallelkurverne $\omega(-\varrho)$ og $\omega(\varrho)$. Cirklen ω^* med Centrum O og Radius ϱ er en konveks Jordankurve af Klassen K med Radierne ϱ, ϱ. Betingelsen for Anvendelsen af Betragtningerne i det foregaaende Afsnit er derfor tilstede. Nu er Punkterne $P(-\varrho)$ og $P(\varrho)$ ensbetydende med hvad vi ovenfor betegnede P_i og P_y, Kurverne $\omega(-\varrho)$ og $\omega(\varrho)$ følgelig med de konvekse Kurver ω_i og ω_y, som tilhører Klassen K. Radierne $r_i(-\varrho)$, $r_y(-\varrho)$

og $r_i(\varrho)$, $r_y(\varrho)$ i Kurverne $\omega(-\varrho)$ og $\omega(\varrho)$ tilfredsstiller Relationerne

(9a) $$r_i - \varrho \leqq r_i(-\varrho); \quad r_y(-\varrho) \leqq r_y - \varrho$$

(9b) $$r_i + \varrho \leqq r_i(\varrho) \quad ; \quad r_y(\varrho) \leqq r_y + \varrho.$$

Som vi skal se, gælder i disse Relationer stadig Lighedstegnet.

Tangenterne $t(-\varrho)$ og $t(\varrho)$ til $\omega(-\varrho)$ og $\omega(\varrho)$ i Punkterne $P(-\varrho)$ og $P(\varrho)$ er parallelle med t; n er følgelig Normal til samtlige Kurver $\omega(\delta)$, hvor $-r_i < \delta < r_i$. Anderledes udtrykt betyder dette, at *Parallelkurverne* $\omega(\delta)$ *til* ω *for* $-r_i < \delta < r_i$ *er indbyrdes parallelle.* Den indre Parallelkurve til $\omega(\varrho)$ i Afstanden $\varrho < r_i(\varrho)$ er selve Kurven ω; vi har derfor de til (9a) analoge Relationer

$$r_i(\varrho) - \varrho \leqq r_i; \quad r_y \leqq r_y(\varrho) - \varrho,$$

som i Forbindelse med (9b) viser, at

$$r_i(\varrho) = r_i + \varrho; \quad r_y(\varrho) = r_y + \varrho.$$

Ved gentagen Anvendelse af dette Resultat ser man let, at ogsaa de ydre Parallelkurver $\omega(\delta)$ hvor $\delta \geqq r_i$ er konvekse Jordankurver af Klassen K med Radierne $r_i + \delta$, $r_y + \delta$. Nu er den ydre Parallelkurve til $\omega(-\varrho)$ i Afstanden ϱ netop Kurven ω. Følgelig har ω Radierne $r_i(-\varrho) + \varrho$ og $r_y(-\varrho) + \varrho$, og vi faar

$$r_i(-\varrho) = r_i - \varrho; \quad r_y(-\varrho) = r_y - \varrho.$$

Hermed er vist, *at Kurven* $\omega(\delta)$ *for ethvert* $\delta > -r_i$ *er en konveks Jordankurve af Klassen K med Radierne* $r_i + \delta$, $r_y + \delta$. Man viser uden Vanskelighed, at ogsaa de indre Parallelkurver $\omega(\delta)$ for $\delta < -r_y$ er konvekse Jordankurver af Klassen K, og at de har Radierne $-\delta - r_y$, $-\delta - r_i$.

Betegner d et positivt Tal mindre end r_i, vil samtlige Parallelkurver $\omega(\delta)$ for $-d \leqq \delta \leqq d$ udfylde en afsluttet Kurvering begrænset af Kurverne $\omega(-d)$ og $\omega(d)$. Gennem hvert Punkt af denne Kurvering gaar kun en af de betragtede Parallelkurver; thi af to af disse Kurver vil stedse den ene være ydre Parallelkurve til den anden; Kurverne vil derfor ikke have noget fælles Punkt.

Et specielt Tilfælde af konvekse Kurvers Addition.

21. Vi vil anvende de foregaaende Betragtninger paa et specielt Tilfælde af konvekse Kurvers Addition, som kommer til at spille en væsentlig Rolle ved Bestemmelsen af kontinuerte Punktsandsynligheder i Planen.

Vi tænker os givet tre konvekse Kurver ω_0, ω_1, ω_2 af Klassen K, hvis tilsvarende Radier $r_{0,i}$, $r_{0,y}$; $r_{1,i}$, $r_{1,y}$; $r_{2,i}$, $r_{2,y}$ tilfredsstiller Betingelserne

(10) $$r_{0,i} \geqq 2 r_{1,y}; \quad r_{1,i} \geqq 2 r_{2,y},$$

og vil undersøge de Mængder $\Sigma_0 = \omega_0$, $\Sigma_1 = \omega_0 + \omega_1$, $\Sigma_2 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$, som fremkommer ved Kurvernes Addition.

Betingelsen for, at et Punkt P i Planen tilhører Σ_1, er den, at Kurverne ω_0 og $P-\omega_1$ har mindst et Punkt fælles. Nu har $-\omega_1$ og ω_1 som kongruente Kurver de samme Radier; vi kan derfor anvende den ovenfor beviste Sætning og ser, at Σ_1 er en afsluttet Kurvering begrænset af to konvekse Kurver ω_i og ω_y af Klassen K, hvis Radier $r_{i,i}$, $r_{i,y}$; $r_{y,i}$, $r_{y,y}$ tilfredsstiller Betingelserne

$$(11)\quad \begin{aligned} r_{0,i}-r_{1,y} &\leqq r_{i,i}\,; \quad r_{i,y}\leqq r_{0,y}-r_{1,i} \\ r_{0,i}+r_{1,i} &\leqq r_{y,i}\,; \quad r_{y,y}\leqq r_{0,y}+r_{1,y}\,. \end{aligned}$$

Lad (se Fig. 22) P_0 være et Punkt af ω_0; Kurven $P_0+\omega_1$ indeholder netop et Punkt P_i af ω_i og et Punkt P_y af ω_y; Tangenterne t_i og t_y til $P_0+\omega_1$ i disse Punkter er parallelle med Tangenten t_0 til ω_0 i P_0; de er tillige Tangenter henholdsvis for ω_i og ω_y. ω_i falder paa den modsatte Side af t_i som P_y. Den korteste Afstand fra P_y til ω_i er derfor mindst lig med Afstanden mellem t_i og t_y, som er større end eller lig med $2r_{1,i}$. Afstanden mellem Kurverne ω_i og ω_y er derfor mindst lig med denne Størrelse. Nu er Summen af Afstandene fra et Punkt P i Planen til Kurverne ω_i og ω_y mindst lig med Afstanden mellem ω_i og ω_y. Ethvert Punkt i Planen har derfor fra mindst en af disse Kurver en Afstand større end eller lig med $r_{1,i}$.

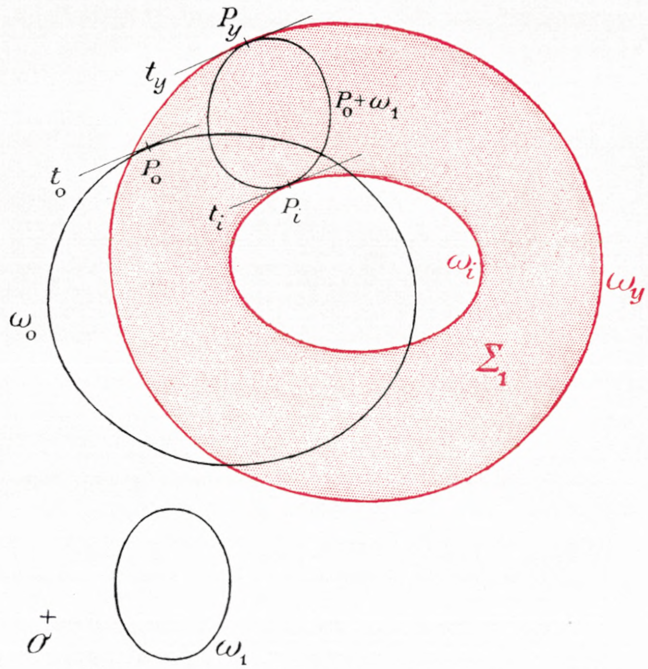

Fig. 22.

Ved Addition af Kurven ω_2 til Mængden Σ_1 fremkommer Mængden Σ_2. Betingelsen for, at et Punkt P i Planen tilhører Σ_2, er den, at Kurven $P-\omega_2$ indeholder mindst et Punkt af Σ_1.

Vi betragter først Mængden af Punkter P af Σ_2, for hvilke Kurverne ω_i og $P-\omega_2$ har mindst et Punkt fælles. Da ifølge (11) $r_{i,i}\geqq 2r_{2,y}$ vil denne Mængde være en afsluttet Kurvering begrænset af to konvekse Kurver ω_{ii} og ω_{iy} af Klassen K, hvis korteste Afstand er mindst $2r_{2,i}$, og hvis Radier $r_{ii,i}$, $r_{ii,y}$; $r_{iy,i}$, $r_{iy,y}$ tilfredsstiller Betingelserne

$$(12\text{a})\quad \begin{aligned} r_{i,i}-r_{2,y} &\leqq r_{ii,i}\,; \quad r_{ii,y}\leqq r_{i,y}-r_{2,i} \\ r_{i,i}+r_{2,i} &\leqq r_{iy,i}\,; \quad r_{iy,y}\leqq r_{i,y}+r_{2,y}\,. \end{aligned}$$

Paa samme Maade vil Mængden af Punkter P af Σ_2, for hvilke Kurverne ω_y og $P-\omega_2$ har mindst et Punkt fælles, være en afsluttet Kurvering begrænset af to konvekse Kurver ω_{yi} og ω_{yy} af Klassen K, hvis korteste Afstand er mindst $2r_{2,i}$, og hvis Radier $r_{yi,i}$, $r_{yi,y}$; $r_{yy,i}$, $r_{yy,y}$ tilfredsstiller Betingelserne

$$\text{(12b)}\qquad \begin{aligned} r_{y,i} - r_{2,y} &\leq r_{yi,i}\,; \quad r_{yi,y} \leq r_{y,y} - r_{2,i} \\ r_{y,i} + r_{2,i} &\leq r_{yy,i}\,; \quad r_{yy,y} \leq r_{y,y} + r_{2,y}\,. \end{aligned}$$

Randen af Mængden Σ_2 udgøres af de to Kurver ω_{ii} og ω_{yy}; thi er P et Punkt af en af disse Kurver, vil $P - \omega_2$ indeholde netop et Punkt af Σ_1 og vil ved en vilkaarlig lille Forskydning kunne bringes helt udenfor Σ_1, ligesom omvendt ethvert Punkt P, for hvilket $P - \omega_2$ indeholder et Punkt af Σ_1 uden at indeholde noget indre Punkt af Σ_1, tilhører enten ω_{ii} eller ω_{yy}. Betegner P_i og P_y to til hinanden svarende Punkter af ω_i og ω_y, vil Kurven $P_i + \omega_2$ indeholde to Punkter P_{ii} og P_{iy} henholdsvis af ω_{ii} og ω_{iy}, medens Kurven $P_y + \omega_2$ vil indeholde to Punkter P_{yi} og P_{yy} henholdsvis af ω_{yi} og ω_{yy}. Tangenterne t_{ii}, t_{iy}, t_{yi}, t_{yy} til ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} i disse Punkter vil være indbyrdes parallelle. (Fig. 23).

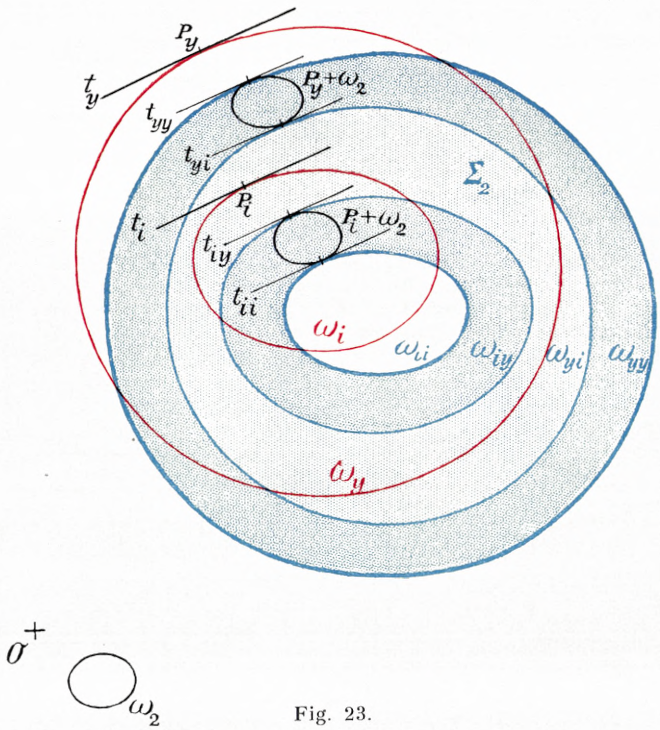

Fig. 23.

Som det fremgaar af Relationerne (10), vil ω_{iy} falde paa den modsatte Side af sin Tangent t_{iy} som P_{yi}, og Afstanden fra P_{yi} til ω_{iy} vil mindst være lig med $2r_{2,i}$. Kurven ω_{yi} omslutter derfor ω_{iy}, og Afstanden mellem ω_{iy} og ω_{yi} er mindst lig med $2r_{2,i}$. Samtlige Punkter P af Σ_2, for hvilke Kurven $P - \omega_2$ hverken skærer ω_i eller ω_y, d. v. s. for hvilke $P - \omega_2$ indeholder lutter indre Punkter af Σ_1, udgør den af Kurverne ω_{iy} og ω_{yi} begrænsede aabne Kurvering.

De indre Radier i Kurverne ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} er alle større end eller lig med $r_{2,i}$; betegner d et positivt Tal mindre end $r_{2,i}$, vil derfor Mængden af Punkter, hvis Afstand fra en af disse Kurver er mindre end eller lig med d, tilhøre en af de afsluttede Kurveringe, som begrænses af Kurverne $\omega_{ii}(-d)$ og $\omega_{ii}(d)$, $\omega_{iy}(-d)$ og $\omega_{iy}(d)$, $\omega_{yi}(-d)$ og $\omega_{yi}(d)$, $\omega_{yy}(-d)$ og $\omega_{yy}(d)$. Man indser let, at disse Kurveringe gaar helt fri af hinanden, og at de to og to i det mindste har Afstanden $2r_{2,i} - 2d$.

KAPITEL IV.

Punktsandsynlighed.

Vi vender nu tilbage til de i Kapitel II indførte Sandsynlighedsfordelinger i Planen. Vi betragtede dengang en Følge $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N, \ldots$ af lukkede konvekse Kurver, paa hvilke der var givet kontinuerte Buesandsynligheder, og viste, hvorledes dette førte til Betragtning af i det store og hele kontinuerte Rektangelsandsynligheder, svarende til de ved Kurvernes Addition fremkomne Punktmængder. Behandlingsmaaden gav tillige Anledning til Indførelse af Sandsynligheder svarende til almindeligere Punktmængder, saavel paa de enkelte Kurver som i Planen. Vi skal nu i dette Kapitel paa speciellere Grundlag gennem Indførelsen af Begrebet Punktsandsynlighed give en udførligere Behandling af disse Sandsynlighedsfordelinger.

Punktsandsynlighed paa en konveks Kurve.

22. Lad der paa en konveks Jordankurve ω være givet en kontinuert Funktion $f(P)$ af det variable Punkt P paa Kurven; vi antager om Funktionen, at den stedse er større end eller lig med Nul uden dog nogensinde at være Nul for samtlige Punkter af en Bue paa ω, og at dens Integral $\int_\omega f(P)\,d\omega$ over Kurven er 1. Funktionen $f(P)$ definerer da en kontinuert Buesandsynlighed paa Kurven af den tidligere (§ 8) betragtede Art, som fremkommer, idet vi for enhver Bue b paa ω betegner Funktionens Integral $\int_b f(P)\,db$ over Buen som Sandsynligheden $w(b)$ for, at et vilkaarligt Punkt af ω tilhører b. Denne Funktion af Buen b er nemlig saavel kontinuert som additiv, den er stedse positiv, og dens Værdi $w(\omega)$ svarende til Kurven selv er 1. Endvidere er den differentiabel, d. v. s. der eksisterer for ethvert Punkt P af ω en entydig bestemt Grænseværdi for Forholdet mellem Sandsynligheden svarende til en Bue, der konvergerer mod Punktet, og Buens Længde. Denne Grænseværdi, som er Funktionens Differentialkvotient i Punktet, er netop $f(P)$. Omvendt vil enhver kontinuert Buesandsynlighed, som er differentiabel med en kontinuert Differentialkvotient, være bestemt paa den angivne Maade ved Hjælp af denne. Funktionen $f(P)$ betegnes som en *kontinuert Punktsandsynlighed* paa Kurven ω.

23. Som ovenfor føres vi gennem en Afbildning af Kurven ω paa et Parameterinterval $0 \leqq \theta < 1$ til Betragtning af Sandsynligheder svarende ogsaa til saadanne Punktmængder paa Kurven, for hvilke den tilsvarende Mængde af Parameterværdier er maalelig i JORDAN'sk Forstand, idet Sandsynligheden svarende til en saadan Mængde sættes lig med Maalet for denne lineære Punktmængde. Disse Sandsynligheder kan ogsaa bestemmes ved Hjælp af Punktsandsynligheden $f(P)$. Til en Punktmængde paa ω sammensat af et endeligt Antal Buer svarer en Mængde af Parameterværdier sammensat af et endeligt Antal Intervaller, altsaa sikkert en maalelig Mængde; følgelig vil der til den givne Mængde paa Kurven svare en Sandsynlighed bestemt som Summen af Integralerne af $f(P)$ over de enkelte Buer, hvoraf Mængden er sammensat. Denne Sum betegner vi naturligt som Funktionens Integral over den givne Mængde. Lad os nu betragte en vilkaarlig Punktmængde m paa Kurven ω. Vi definerer det indre og ydre (JORDAN'ske) Integral af Funktionen $f(P)$ over Mængden m som henholdsvis øvre og nedre Grænse for Funktionens Integral over saadanne Punktmængder, sammensat af et endeligt Antal Buer af ω, som henholdsvis tilhører og indeholder m. Er de to Integraler ligestore, betegner vi deres fælles Værdi simpelthen som Funktionens Integral $\int_m f(P)\,dm$ over Mængden m. Det ses straks, at de Punktmængder paa ω, for hvilke vi ad denne Vej faar defineret Integraler, er de samme som dem, for hvilke vi ovenfor fik defineret Sandsynligheder, og at for disse Mængder *Integral og Sandsynlighed stedse stemmer overens.*

Punktsandsynligheder i Planen. Definition.

24. Vi betragter nu en Følge

$$(1) \qquad \omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_N,\ \ldots$$

af konvekse Jordankurver af Klassen K (se § 12), om hvis Radier

$$(2) \qquad r_{0,i},\ r_{0,y};\ r_{1,i},\ r_{1,y};\ \ldots;\ r_{N,i},\ r_{N,y};\ \ldots$$

vi antager, at de konvergerer mod Nul, naar N vokser ud over alle Grænser.

Lad der paa de enkelte Kurver ω_n være givet kontinuerte Punktsandsynligheder $f_n(P_n)$. Gennem de tilsvarende Afbildninger af Kurverne paa Parameterintervaller $0 \leq \theta_n < 1$ føres vi (se § 10) til Afbildning af de ved Kurvernes Addition fremkomne Punktmængder $\Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} \omega_n$ paa Enhedsterninger Q_N $(0 \leq \theta_n < 1)$ i de tilsvarende $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$-Rum og dermed til Indførelse af plane Sandsynlighedsfordelinger $W_N(M)$ svarende til disse Mængder.

Vi vil vise, hvorledes disse Mængdesandsynligheder for alle N fra et vist Trin, paa tilsvarende Maade som Sandsynlighedsfordelingerne paa de enkelte Kurver, lader sig bestemme ved Hjælp af kontinuerte Punktsandsynligheder i Planen.

Lad os betragte en kontinuert Funktion $F(P)$ af det variable Punkt P i Planen, om hvilken det er givet, at den ikke antager negative Værdier. Vi definerer det indre Integral $J_i(M)$ af denne Funktion over en given Punktmængde M i Planen som øvre Grænse for Funktionens Integral over alle Punktmængder, sammensat af et endeligt Antal Rektangler, som tilhører Mængden. Paa tilsvarende Maade definerer vi, naar M er begrænset, det ydre Integral $J_y(M)$ af Funktionen over Mængden M som nedre Grænse for Funktionens Integral over alle Punktmængder, sammensat af et endeligt Antal Rektangler, som indeholder Mængden; er M ikke begrænset, kan denne Definition ikke anvendes; vi definerer da Integralet $J_y(M)$ som øvre Grænse for det ydre Integral af $F(P)$ over alle begrænsede Delmængder af M. For begrænsede Punktmængder er de to Integraler, det indre og det ydre, altid endelige; derimod kan de for ubegrænsede Mængder antage Værdien uendelig. Er for en given Punktmængde

M det indre og det ydre Integral ligestore og endelige, betegner vi Funktionen som integrabel (i JORDAN'sk Forstand) over den givne Mængde; den fælles Værdi $J(M)$ for de to Integraler betegner vi da som det JORDAN'ske Integral $\iint_M F(P)\,dM$ af Funktionen $F(P)$ over Mængden M. Er i dette Tilfælde N en vilkaarlig Delmængde af M, har man

$$J(M) = J_i(N) + J_y(M-N).$$

Denne Relation viser, at man i de Tilfælde, hvor $F(P)$ er integrabel over hele Planen, simplere end ud fra den ovenfor givne Definition kan bestemme det ydre Integral af $F(P)$ over en vilkaarlig Punktmængde i Planen som den komplementære Værdi til det indre Integral af $F(P)$ over Komplementærmængden.

Hvad angaar Mængdesandsynlighederne $W_N(M)$, er det nu vort Maal at vise, at de for alle $N \geqq N_0$, hvor N_0 er et Tal, som alene afhænger af den givne Følge af konvekse Kurver, er fuldstændig bestemt som Integraler af kontinuerte Punktsandsynligheder, d. v. s. at der for ethvert $N \geqq N_0$ findes en kontinuert Funktion

$$F_N(P)$$

af det variable Punkt P i Planen, som ikke antager negative Værdier, og som er integrabel netop over de Mængder, for hvilke den tilsvarende Sandsynlighed $W_N(M)$ er defineret og med denne Sandsynlighed til Integral. Skriver vi

$$W_N(M) = \iint_M F_N(P)\,dM, \tag{3}$$

vil vi herved udtrykke den fuldstændige Identitet mellem de to Mængdefunktioner $W_N(M)$ og $\iint_M F_N(P)\,dM$ ogsaa med Hensyn til Definitionsomraade.

En saadan Funktion $F_N(P)$ vil altid være integrabel over hele Planen med Integralet 1; for alle Punkter udenfor eller paa Randen af Σ_N vil den have Værdien Nul.

25. Findes der for et bestemt N en kontinuert Punktsandsynlighed $F_N(P)$, vil denne øjensynlig være entydig bestemt ved Betingelsen (3); den vil endda være entydig bestemt allerede ved den svagere Betingelse

$$W_N(R) = \iint_R F_N(P)\,dR, \tag{4}$$

som fremgaar af (3), naar vi lader M betegne Rektangler alene, i hvilket Tilfælde Eksistensen af begge de betragtede Mængdefunktioner er sikker.

Vi vil derfor foreløbig indskrænke os til at søge denne Betingelse opfyldt. Senere skal vi vise, at en kontinuert Funktion $F_N(P)$, som tilfredsstiller Betingelsen (4), af sig selv vil tilfredsstille den stærkere Betingelse (3) og altsaa vil være en kontinuert Punktsandsynlighed af den ønskede Art.

Er det for et eller andet n lykkedes at bestemme en kontinuert Funktion $F_n(P)$ saaledes, at

$$W_n(R) = \iint_R F_n(P)\, dR$$

for ethvert Rektangel R i Planen, og sætter vi

$$F_{n+1}(P) = \int_0^1 F_n(P - P_{n+1})\, d\theta_{n+1}, \tag{5}$$

vil $F_{n+1}(P)$ ligeledes være en kontinuert Funktion af P, og vi vil have

$$W_{n+1}(R) = \int_0^1 W_n(R - P_{n+1})\, d\theta_{n+1} = \int_0^1 d\theta_{n+1} \iint_{R-P_{n+1}} F_n(P)\, d(R - P_{n+1}) =$$

$$\int_0^1 d\theta_{n+1} \iint_R F_n(P - P_{n+1})\, dR = \iint_R dR \int_0^1 F_n(P - P_{n+1})\, d\theta_{n+1} = \iint_R F_{n+1}(P)\, dR.$$

Heraf følger, at dersom Betingelsen (4) kan opfyldes for et bestemt $N = N_0$, da vil den ogsaa kunne opfyldes for ethvert $N > N_0$, og Funktionerne $F_N(P)$ vil være bestemt udfra $F_{N_0}(P)$ ved Hjælp af Relationen (5). Vor Opgave er den at vise, at der findes et $N = N_0$, for hvilket Betingelsen kan opfyldes.

Antager vi dette bevist, følger af Relationen (5) i Forbindelse med den tidligere (§ 11) beviste Sætning, at for ethvert N Sandsynligheden $W_N(R) > 0$, naar blot R i sit Indre indeholder Punkter af Σ_N, den ikke helt uinteressante Egenskab ved Sandsynlighederne $F_N(P)$, at de, ihvert Fald for $N \geqq N_0 + 2$, er positive i det Indre af de tilsvarende Mængder Σ_N (og ikke blot positive eller Nul), forudsat at vi opfatter Randen af Σ_N i den i § 4 angivne udvidede Betydning. Thi af $F_N(P) = 0$ følger for et saadant N af (5) $F_{N-1}(P - P_N) = 0$ for alle Punkter P_N af ω_N og altsaa $F_{N-2}\big(P - (P_N + P_{N-1})\big) = 0$ for alle Punkter $P_N + P_{N-1}$ af den ved Addition af Kurverne ω_N og ω_{N-1} fremkomne Punktmængde $\omega_N + \omega_{N-1}$. For indre Punkter P af Σ_N indeholder imidlertid Punktmængden $P - (\omega_N + \omega_{N-1})$ sikkert Rektangler, som helt tilhører Σ_{N-2}.

Punktsandsynligheder i Planen. Konstruktion.

26. Vi vil først betragte det Tilfælde, hvor de til Kurverne ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 svarende Radier tilfredsstiller Betingelserne

$$r_{0,i} \geqq 2 r_{1,y}; \quad r_{1,i} \geqq 2 r_{2,y}; \quad r_{2,i} \geqq 2 r_{3,y}, \tag{6}$$

et Tilfælde for hvilket vi tidligere (§ 21) har undersøgt Punktmængderne Σ_0, Σ_1, Σ_2. Vi vil vise, at Betingelsen (4) i dette Tilfælde kan tilfredsstilles allerede for $N = 3$.

Beviset er elementært, men ret kompliceret; det beror paa en direkte Konstruktion af en Funktion $F_3(P)$, som har den ønskede Egenskab. Som vi skal se, kan vi allerede for $N = 1$ angive en Funktion $F_1(P)$, som viser sig at være diskontinuert paa visse Kurver, men som dog, naar vi opererer med en passende Integraldefinition (den CAUCHY'ske), tilfredsstiller Betingelsen (4). Paa denne Funktion anvender vi Betragtningen ovenfor og faar bestemt en Funktion

$$F_2(P) = \int_0^1 F_1(P - P_2)\, d\theta_2 ,$$

som ligeledes bliver diskontinuert paa visse Kurver, og som, idet vi stadig opererer med den CAUCHY'ske Integraldefinition, tilfredsstiller Betingelsen (4) for $N = 2$. Som Følge af Integrationen bliver $F_2(P)$ svagere diskontinuert end $F_1(P)$. Ved fornyet Anvendelse af den samme Betragtning denne Gang paa Funktionen $F_2(P)$ forsvinder al Diskontinuitet; Funktionen

$$F_3(P) = \int_0^1 F_2(P - P_3)\, d\theta_3$$

viser sig at være en kontinuert Funktion af P, som tilfredsstiller Betingelsen (4).

Konstruktion af $F_1(P)$.

27. Lad os betragte Punktmængden $\Sigma_1 = \omega_0 + \omega_1$, begrænset af de to konvekse Jordankurver ω_i og ω_y. Vi vil definere en Funktion $F_1(P)$ af det variable Punkt P i Planen. Tilhører P enten $I(\omega_i)$ eller $Y(\omega_y)$ (d. v. s. tilhører P ikke Σ_1), har Kurverne ω_0 og $P - \omega_1$ intet Punkt fælles; vi sætter da $F_1(P) = 0$. Tilhører P saavel $Y(\omega_i)$ som $I(\omega_y)$ (d. v. s. er P et indre Punkt af Σ_1), skærer Kurverne ω_0 og $P - \omega_1$ hinanden i to Punkter (se Fig. 24); betegner vi disse $P'_0 = P - P'_1$ og $P''_0 = P - P''_1$, er P'_1 og P''_1 de to Punkter af ω_1, som ved Addition henholdsvis til Punkterne P'_0 og P''_0 af ω_0 giver P; idet Vinklerne mellem ω_0 og $P - \omega_1$ i P'_0 og P''_0 betegnes henholdsvis p' og p'', vil vi definere Funktionsværdien i Punktet P som

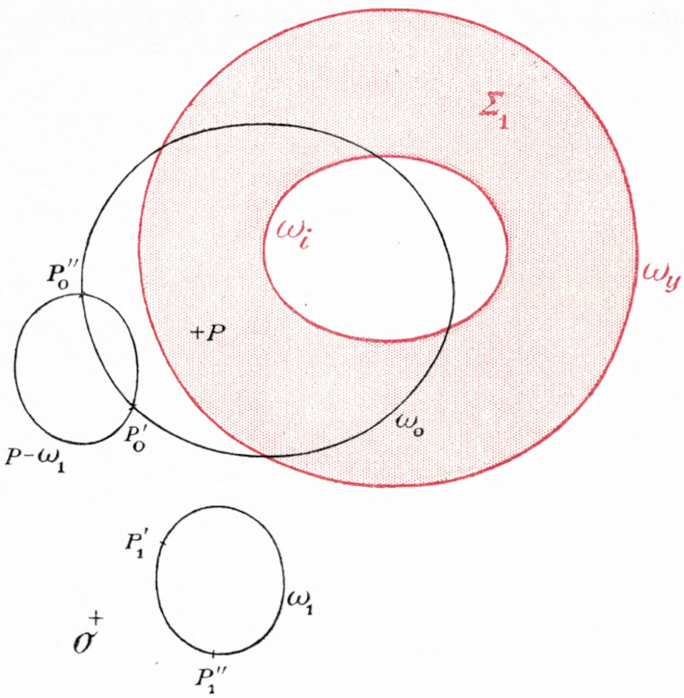

Fig. 24.

$$(7) \qquad F_1(P) = \frac{f_0(P'_0) \cdot f_1(P'_1)}{\sin p'} + \frac{f_0(P''_0) \cdot f_1(P''_1)}{\sin p''} ;$$

her betegner $f_0(P'_0)$ og $f_0(P''_0)$ Punktsandsynlighederne paa ω_0 i Punkterne P'_0 og P''_0, og $f_1(P'_1)$ og $f_1(P''_1)$ betegner Punktsandsynlighederne paa ω_1 i Punkterne P'_1 og P''_1. Tilhører Punktet P endelig enten ω_i eller ω_y (d. v. s. er P et

Randpunkt for Σ_1), rører ω_0 og $P-\omega_1$ hinanden i et Punkt $P_0 = P - P_1$; vi sætter da $F_1(P) = \infty$.

Den hermed definerede Funktion $F_1(P)$ er *kontinuert undtagen paa Kurverne* ω_i *og* ω_y. Vi vil vise, at den, naar vi opererer med en passende Integraldefinition, tilfredsstiller Betingelsen (4), d. v. s. *at dens Integral over ethvert Rektangel R i Planen er lig med den til Rektanglet svarende Sandsynlighed* $W_1(R)$.

28. Lad (XY) være et vilkaarligt, men fast retvinklet Koordinatsystem i Planen, og lad os betragte de akseparallelle Rektangler i dette System. Vi vil definere, hvad vi vil forstaa ved Integralet $\iint_R F_1(P)\,dR$ af $F_1(P)$ over et Rektangel R i Systemet.

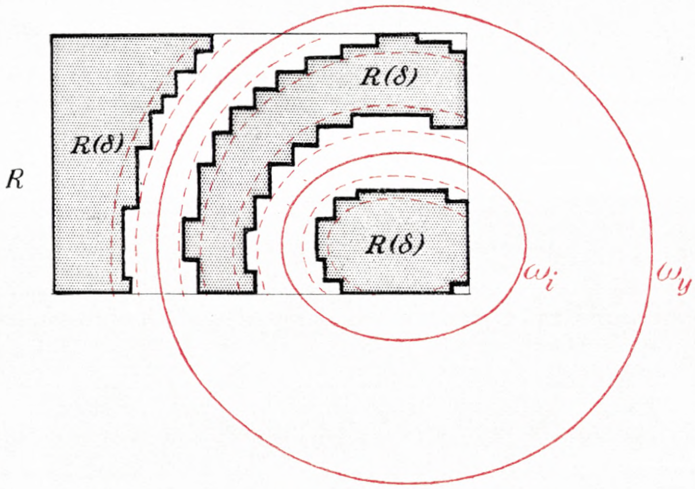

Fig. 25.

Lad d betegne et positivt Tal, som konvergerer mod Nul. For enhver Værdi af d betragter vi (Fig. 25) Mængden $A(d)$ af Punkter i R, hvis Afstand fra ω_i og ω_y er større end d. Paa Mængden $A(d)$ er $F_1(P)$ ligelig kontinuert og begrænset. For ethvert Punkt P af $A(d)$ betragter vi det akseparallelle Kvadrat med Diagonalen d, som har sit Midtpunkt i P. $A(d)$ vil tilhøre en Punktmængde $B(d)$ sammensat af et endeligt Antal af disse Kvadrater; den fælles Del for R og $B(d)$ betegner vi $R(d)$. Punktmængden $R(d)$ er sammensat af et endeligt Antal akseparallelle Rektangler; den tilhører $A\left(\frac{d}{2}\right)$; følgelig er $F_1(P)$ ligelig kontinuert og begrænset paa Mængden $R(d)$, og vi kan tale om Integralet

$$I(d) = \iint_{R(d)} F_1(P)\,dR(d)$$

af $F_1(P)$ over denne Mængde. Da $F_1(P)$ aldrig er negativ, vil Integralet $I(d)$, naar d konvergerer mod Nul, nærme sig til en bestemt Grænseværdi, som maaske kan være uendelig, og som vi betegner som Integralet

$$I = \iint_R F_1(P)\,dR$$

af $F_1(P)$ over Rektanglet R; man ser let, at den Vilkaarlighed, som er tilstede i Definitionen af Mængderne $R(d)$, er uden Betydning for Integralets Værdi.

29. For at vise at Integralet I altid er lig med den til Rektanglet R svarende Sandsynlighed $W_1(R)$, betragter vi for enhver af Mængderne $R(d)$ den tilsvarende Sandsynlighed $W_1(R(d))$ bestemt som Maalet for den Punktmængde $\Omega(d)$ i Enhedskvadratet $Q_1 (0 \leqq \theta_0 < 1,\ 0 \leqq \theta_1 < 1)$ i θ_0, θ_1-Planen, der svarer til $R(d)$. Vi vil vise, at $W_1(R(d)) = I(d)$. Hermed vil Beviset være fuldført; thi idet d konvergerer mod Nul, vil $\Omega(d)$ konvergere mod en Mængde, som, bortset fra en Mængde af Maalet Nul hidrørende fra de Buer af ω_i og ω_y, som tilhører R, er lig med den til R svarende Delmængde Ω af Q_1. $W_1(R(d))$ vil følgelig[1] konvergere mod $W_1(R)$, og Rigtigheden af Identiteten

$$W_1(R) = \iint_R F_1(P)\, dR$$

vil være bevist.

Sandsynligheden $W_1(R(d))$ vil være bestemt som Summen af Sandsynlighederne svarende til de enkelte Rektangler, hvoraf $R(d)$ er sammensat; paa samme Maade vil $I(d)$ være bestemt som Summen af Integralerne af $F_1(P)$ over disse Rektangler. For at vise at $I(d) = W_1(R(d))$ er det derfor tilstrækkeligt at vise, at for ethvert af disse Rektangler Integral og Sandsynlighed stemmer overens. For de Rektangler, som tilhører enten $I(\omega_i)$ eller $Y(\omega_y)$, er saavel Integral som Sandsynlighed lig med Nul. Tilbage staar da blot at vise, at

$$W_1(R_0) = \iint_{R_0} F_1(P)\, dR_0,$$

naar (se Fig. 26) R_0 er et akseparallelt Rektangel, som tilhører Σ_1 og har en positiv Afstand fra ω_i og ω_y.

Funktionen $F_1(P)$ er for ethvert indre Punkt P af Σ_1 defineret som Summen af de to *Led*

$$F_1'(P) = \frac{f_0(P_0') \cdot f_1(P_1')}{\sin p'} \quad \text{og} \quad F_1''(P) = \frac{f_0(P_0'') \cdot f_1(P_1'')}{\sin p''}.$$

Det ligger derfor nær ved Integrationen af $F_1(P)$ at integrere ledvis. For at kunne gøre dette maa vi imidlertid først nøjagtig definere de to *Funktioner* $F_1'(P)$ og $F_1''(P)$, d. v. s. vi maa angive en Metode til samtidig for alle Punkter P at sondre mellem Punkterne P_0' og P_0''. Vi tænker os hertil fastlagt en Omløbsretning paa ω_0 (f. Eks. bestemt ved voksende θ_0) og indfører den Vedtægt stadig at lade P_0' være Begyndelsespunktet, P_0'' Endepunktet af den Bue af ω_0, der falder indenfor Kurven $P - \omega_1$. De derved bestemte Funktioner $F_1'(P)$ og $F_1''(P)$ er begge ligelig kontinuerte og begrænsede paa Rektanglet R_0, og vi har

---

[1] Medens der i den LEBESGUE'ske Maalteori gælder den almindelige Sætning, at Grænsemængden for en voksende Følge af maalelige Mængder altid er maalelig paany, og at dens Maal er Grænseværdien for de givne Mængders Maal, udsiger den tilsvarende Sætning i den JORDAN'ske Teori kun, at *saafremt* Grænsemængden for en voksende Følge af maalelige Mængder paany er maalelig, da vil dens Maal være Grænseværdien for de givne Mængders Maal.

$$\iint_{R_0} F_1(P)\,dR_0 = \iint_{R_0} F_1'(P)\,dR_0 + \iint_{R_0} F_1''(P)\,dR_0\,.$$

Vi betragter nu (Fig. 26) den til R_0 svarende Delmængde Ω_0 af Q_1. Ethvert Punkt P af R_0 kan paa to Maader bestemmes som en Sum af to Punkter P_0 og P_1 henholdsvis af ω_0 og ω_1, nemlig som Sum af Punkterne P_0' og P_1' og som Sum af Punkterne P_0'' og P_1''; det svarer derfor til to Punkter (θ_0', θ_1') og (θ_0'', θ_1'') af Ω_0.

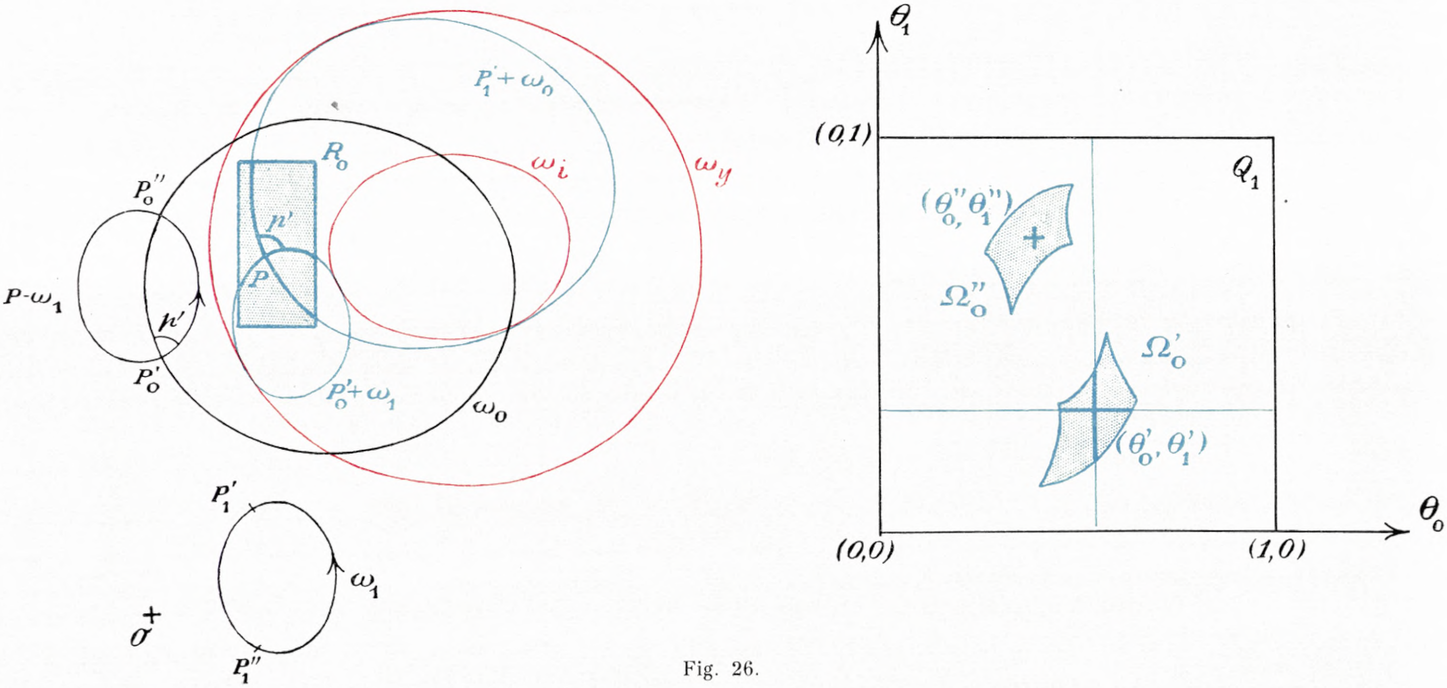

Fig. 26.

Vor Vedtægt giver os en tilsvarende Deling af Ω_0 i to Mængder Ω_0' og Ω_0'', den første bestaaende af Punkterne (θ_0', θ_1'), den anden af Punkterne (θ_0'', θ_1''). Ω_0' og Ω_0'' har en positiv mindste Afstand; de er derfor begge maalelige. Betegner vi deres Maal $W_1'(R_0)$ og $W_1''(R_0)$, er

$$W_1(R_0) = W_1'(R_0) + W_1''(R_0).$$

Vi vil vise, at

$$W_1'(R_0) = \iint_{R_0} F_1'(P)\,dR_0 \quad \text{og} \quad W_1''(R_0) = \iint_{R_0} F_1''(P)\,dR_0\,,$$

hvormed Beviset vil være fuldført. Vi kan nøjes med at bevise den første Relation. Punktmængden Ω_0' er afbildet enentydig og kontinuert paa Rektanglet R_0. Lad (θ_0', θ_1') være det Punkt af Ω_0', som svarer til det vilkaarlige Punkt P af R_0. Til de rette Liniestykker $\theta_1 = \theta_1'$ og $\theta_0 = \theta_0'$ gennem (θ_0', θ_1'), som er parallelle henholdsvis med θ_0-Aksen og med θ_1-Aksen, svarer de to Kurver $\omega_0 + P_1'$ og $P_0' + \omega_1$

gennem P; deres Tangenter i Punktet P skærer hinanden under samme Vinkel p' som Tangenterne til ω_0 og $P-\omega_1$ i Punktet P'_0; til Bueelementerne $d(\omega_0+P'_1)$ og $d(P'_0+\omega_1)$ i Punktet P svarer Linieelementer $d\theta_0 = f_0(P'_0)\, d(\omega_0+P'_1)$ og $d\theta_1 = f_1(P'_1)\, d(P'_0+\omega_1)$ i Punktet (θ'_0, θ'_1). Anvender vi derfor ved Bestemmelsen af $\iint_{R_0} F'_1(P)\, dR_0$ Planelementet $dR_0 = d(\omega_0+P'_1)\, d(P'_0+\omega_1) \sin p'$, faar vi

$$\iint_{R_0} F'_1(P)\, dR_0 = \iint_{\Omega'_0} d\theta_0\, d\theta_1 = W'_1(R_0).$$

Hermed er den opstillede Sætning bevist.

30. Lad d være et positivt Tal mindre end $r_{1,i}$. Funktionen $F_1^d(P)$, som er lig med $F_1(P)$ for alle Punkter P, hvis Afstand fra ω_i og ω_y er større end d, men som iøvrigt er lig med Nul, er en begrænset Funktion af Punktet P. Den er kontinuert undtagen paa Parallelkurverne $\omega_i(d)$ og $\omega_y(-d)$ til ω_i og ω_y. Begge disse Kurver er konvekse Jordankurver; Funktionen $F_1^d(P)$ er derfor integrabel over ethvert Rektangel R i Planen, og dens Integral

$$W_1^d(R) = \iint_R F_1^d(P)\, dR \tag{8}$$

er en kontinuert Funktion af R. Man viser uden Vanskelighed, at denne Funktion, naar d konvergerer mod Nul, vil konvergere mod Funktionen

$$W_1(R) = \iint_R F_1(P)\, dR.$$

Betegner R_0 et Rektangel, som indeholder Σ_1, har vi for ethvert Rektangel R

$$|W_1^d(R) - W_1(R)| \leqq |W_1^d(R_0) - W_1(R_0)|;$$

denne Ulighed viser, at $W_1^d(R)$ *konvergerer ligelig mod* $W_1(R)$.

31. Funktionen $F_1(P)$ er kontinuert i hele Planen undtagen paa Kurverne ω_i og ω_y, følgelig ligelig kontinuert og begrænset paa enhver afsluttet Punktmængde, som ikke indeholder noget Punkt af disse Kurver. Derimod er $F_1(P)$ ikke begrænset paa den aabne Punktmængde, der udgøres af samtlige Punkter, som ikke tilhører ω_i eller ω_y. Vi vil imidlertid vise, at Funktionen

$$F_1(P)\cdot\sqrt{d},$$

hvor d betegner den mindste Afstand fra P til et Punkt af ω_i eller ω_y, er en begrænset Funktion paa denne Mængde, *at der m. a. O. findes en positiv Konstant* K_1, *saaledes at*

$$F_1(P) \leq \frac{K_1}{\sqrt{d}} \tag{9}$$

for ethvert Punkt P, der ikke falder paa ω_i *eller* ω_y.

For Punkter, som enten tilhører $I(\omega_i)$ eller $Y(\omega_y)$, er $F_1(P) = 0$. Vi kan derfor nøjes med at betragte $F_1(P)$ for Punkter, som samtidig tilhører $Y(\omega_i)$ og $I(\omega_y)$, d. v. s. for indre Punkter af Σ_1. For saadanne Punkter har vi

$$F_1(P)\sqrt{d} = f_0(P'_0)\, f_1(P'_1)\,\frac{\sqrt{d}}{\sin p'} + f_0(P''_0)\, f_1(P''_1)\,\frac{\sqrt{d}}{\sin p''}\,.$$

Nu er ifølge § 19

$$\frac{\sqrt{d}}{\sin p'} < k\,;\quad \frac{\sqrt{d}}{\sin p''} < k\,,$$

hvor $k = \sqrt{\dfrac{2\,r_{0,i}\,r_{1,y}}{r_{0,i} - r_{1,y}}}$ er uafhængig af Punktet P. Betegner φ_0 og φ_1 øvre Grænse for de kontinuerte Funktioner $f_0(P_0)$ og $f_1(P_1)$, har vi altsaa

$$F_1(P)\sqrt{d} < 2\cdot\varphi_0\cdot\varphi_1\cdot k\,,$$

hvormed Sætningen er bevist.

Konstruktion af $F_2(P)$.

32. Vi vender os nu til Betragtning af Punktmængden $\Sigma_2 = \Sigma_1 + \omega_2$. Betingelsen for, at et Punkt P i Planen tilhører Σ_2, er den, at Kurven $P - \omega_2$ indeholder Punkter af Σ_1. Lad d være et positivt Tal mindre end $r_{1,i}$. Vi betragter den ovenfor indførte Funktion $F_1^d(P)$, som er lig med $F_1(P)$ for alle Punkter hvis Afstand fra ω_i og ω_y er større end d, men som iøvrigt er lig med Nul. For ethvert Punkt P i Planen vil Funktionen

$$F_1^d(P - P_2)\,,$$

hvor $P - P_2$ gennemløber Kurven $P - \omega_2$, være en begrænset og stykkevis kontinuert Funktion af Parameteren θ_2 for P_2 paa ω_2; dens Integral

$$F_2^d(P) = \int_0^1 F_1^d(P - P_2)\,d\theta_2\,, \tag{10}$$

som er lig med Kurveintegralet

$$\int_{P-\omega_2} F_1^d(P - P_2)\, f_2(P_2)\, d(P - \omega_2)\,,$$

vil fremstille en i hele Planen kontinuert Funktion af Punktet P.

Vi vil vise, at *Integralet*

$$W_2^d(R) = \iint_R F_2^d(P)\,dR \tag{11}$$

af denne Funktion, naar d konvergerer mod Nul, *konvergerer ligelig mod Rektangelsandsynligheden* $W_2(R)$.

$W_2^d(R)$ bestemmes ved Integralet

$$\iint_R dR \int_0^1 F_1^d(P-P_2)\, d\theta_2 .$$

Da Funktionen $F_1^d(P-P_2)$ er begrænset, indser man om dette Integral let, at det er lig med Integralet

$$\int_0^1 d\theta_2 \iint_R F_1^d(P-P_2)\, dR$$

af den kontinuerte Funktion

$$\iint_R F_1^d(P-P_2)\, dR = \iint_{R-P_2} F_1^d(P)\, d(R-P_2) = W_1^d(R-P_2).$$

Vi har altsaa

$$W_2^d(R) = \int_0^1 W_1^d(R-P_2)\, d\theta_2 .$$

Naar d konvergerer mod Nul, konvergerer $W_1^d(R-P_2)$ som ovenfor vist ligelig mod Rektangelsandsynligheden $W_1(R-P_2)$. $W_2^d(R)$ konvergerer altsaa ligelig mod Integralet

$$\int_0^1 W_1(R-P_2)\, d\theta_2 ,$$

som netop fremstiller Rektangelsandsynligheden $W_2(R)$.

33. Naar d konvergerer (monotont) mod Nul, vil Funktionen $F_2^d(P)$ konvergere monotont mod en Funktion $F_2(P)$ fremstillet ved det CAUCHY'ske Integral

$$F_2(P) = \int_0^1 F_1(P-P_2)\, d\theta_2 \tag{12}$$

af den stykkevis kontinuerte, men ikke altid begrænsede Funktion $F_1(P-P_2)$. Funktionen $F_2(P)$ fremstilles ogsaa ved Kurveintegralet

$$\int_{P-\omega_2} F_1(P-P_2)\, f_2(P_2)\, d(P-\omega_2).$$

Vi vil vise, at *$F_2^d(P)$ konvergerer ligelig mod $F_2(P)$ paa enhver afsluttet Punktmængde, hvis Afstand fra Kurverne ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} er større end Nul.*

Lad A være en afsluttet Punktmængde, hvis Afstand a fra Kurverne ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} er større end Nul. Vi skal vise, at Funktionen

$$F_2(P) - F_2^d(P)$$

konvergerer ligelig mod Nul paa Mængden A. For Punkter P, som tilhører enten $I(\omega_{ii})$ eller $Y(\omega_{yy})$, er for alle d

$$F_2(P) = F_2^d(P) = 0;$$

$F_2(P) - F_2^d(P)$ er altsaa konstant lig med Nul. Vi kan derfor i det følgende nøjes med at betragte $F_2(P) - F_2^d(P)$ for Punkter af A, som tilhører Σ_2.

Lad P være et Punkt af A, som tilhører Σ_2; Kurven $P-\omega_2$ tilhører helt eller delvis Σ_1. Enhver Forskydning, som bringer den til at røre ω_i eller ω_y, er større end eller lig med a. Falder P mellem Kurverne ω_{iy} og ω_{yi}, tilhører $P-\omega_2$ helt Σ_1; dens Afstand fra ω_i og ω_y er mindst a; for ethvert $d < a$ er følgelig

$$F_2(P) - F_2^d(P) = 0.$$

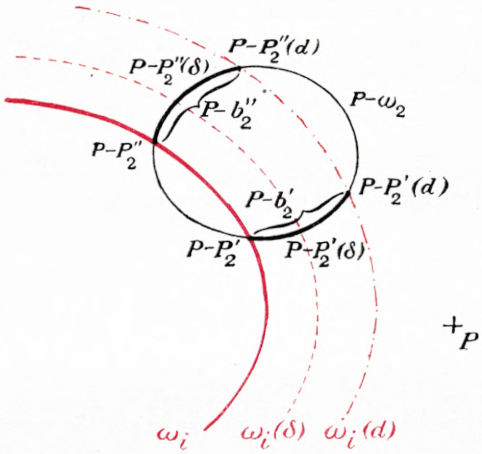

Fig. 27.

Falder P mellem ω_{ii} og ω_{iy} eller mellem ω_{yi} og ω_{yy}, tilhører Kurven $P-\omega_2$ kun delvis Σ_1; i det første Tilfælde skærer den ω_i, i det andet Tilfælde ω_y. Vi vil nøjes med at betragte det første Tilfælde (Fig. 27). $F_2(P) - F_2^d(P)$ kan bestemmes som Integralet af Funktionen $F_2(P - P_2)\, f_2(P_2)$ over den Del af $P - \omega_2$, som falder mellem Kurven ω_i og dens ydre Parallelkurve $\omega_i(d)$ i Afstanden d. For ethvert $d < a$ skærer $\omega_i(d)$ Kurven $P-\omega_2$ i to Punkter. Mellem Kurverne ω_i og $\omega_i(d)$ afskæres derfor to Buer $P - b_2'$ og $P - b_2''$ af $P - \omega_2$. En Parallelkurve $\omega_i(\delta)$ til ω_i vil, naar $0 \leqq \delta \leqq d$, skære begge disse Buer hver i et Punkt; betegner vi Skæringspunkterne $P - P_2'(\delta)$ og $P - P_2''(\delta)$, Skæringsvinklerne $p'(\delta)$ og $p''(\delta)$, faar vi

$$F_2(P) - F_2^d(P) = \int_0^d \frac{F_1\big(P - P_2'(\delta)\big) . f_2\big(P_2'(\delta)\big)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta + \int_0^d \frac{F_1\big(P - P_2''(\delta)\big)\, f_2\big(P_2''(\delta)\big)}{\sin p''(\delta)}\, d\delta.$$

Vi vil vise, at de to Integraler hver for sig konvergerer ligelig mod Nul med d paa den (afsluttede) Delmængde A_i af A, som falder mellem Kurverne ω_{ii} og ω_{iy}.

Lad os f. Eks. betragte det første Integral. Lad φ_2 betegne øvre Grænse for den kontinuerte Funktion $f_2(P_2)$ paa ω_2, og lad g' betegne den positive nedre Grænse for den ligeledes kontinuerte Funktion $\sin p'(\delta)$ af P og δ, naar P gennemløber Mængden A_i og δ Intervallet $0 \leqq \delta \leqq \frac{a}{2}$. For ethvert δ, som tilhører Intervallet $0 \leqq \delta \leqq \frac{a}{2}$, og ethvert Punkt P af A_i har vi

$$\frac{F_1\big(P - P_2'(\delta)\big)\, f_2\big(P_2'(\delta)\big)}{\sin p'(\delta)} \leqq \frac{K_1 \cdot \varphi_2}{\sqrt{\delta} \cdot g'}.$$

For ethvert Punkt P af A_i og ethvert $d \leqq \frac{a}{2}$ har vi altsaa

$$\int_0^d \frac{F_1\big(P - P_2'(\delta)\big)\, f_2\big(P_2'(\delta)\big)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta \leqq \frac{K_1\, \varphi_2}{g'} \int_0^d \frac{d\delta}{\sqrt{\delta}} = \frac{K_1\, \varphi_2}{g'} \cdot 2\sqrt{d};$$

men heraf følger straks, at Integralet konvergerer ligelig mod Nul med d.

34. Af den hermed beviste Sætning følger specielt, at *Funktionen* $F_2(P)$ *er kontinuert i ethvert Punkt* P, *som ikke falder paa Kurverne* ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy}. Har Rektanglet R en positiv Afstand fra disse Kurver, bestemmes Integralet

$$\iint_R F_2(P)\,dR$$

af $F_2(P)$ over R som Grænseværdi for Integralet

$$W_2^d(R) = \iint_R F_2^d(P)\,dR,$$

naar d konvergerer mod Nul. Dette Integral konvergerer imidlertid som ovenfor vist mod Rektangelsandsynligheden $W_2(R)$. Vi har altsaa

$$W_2(R) = \iint_R F_2(P)\,dR.$$

Denne Relation kan udvides til at gælde for vilkaarlige Rektangler i Planen, naar man benytter en Integraldefinition analog med den ovenfor ved Betragtningen af $F_1(P)$ anvendte. *Funktionen* $F_2(P)$ *bestemmer saaledes fuldstændig Rektangelsandsynligheden* $W_2(R)$. Dette kommer vi dog ikke til at benytte i det følgende.

35. Funktionen $F_2(P)$ er ikke begrænset paa den aabne Punktmængde, der udgøres af samtlige Punkter, som ikke tilhører ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy}; den er derfor ingen kontinuert Funktion af P i hele Planen. Vi vil imidlertid vise, at den er væsentlig svagere diskontinuert end Funktionen $F_1(P)$.

Paa Mængderne $I(\omega_{ii})$ og $Y(\omega_{yy})$ er $F_2(P)$ lig med Nul. Vi behøver derfor blot at betragte Funktionen paa Mængden Σ_2.

Lad a være et *fast* positivt Tal mindre end $\frac{r_{2,i}}{2}$. Vi betragter Mængden A_2 af Punkter af Σ_2, hvis Afstand fra Kurverne ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} er større end a. Paa denne Mængde er $F_2(P)$ begrænset. Ethvert Punkt af Σ_2, som ikke tilhører A_2, har fra en og, da Kurverne, som vist i § 21, to og to mindst har Afstanden $2r_{2,i}$, kun fra en af Kurverne ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} en Afstand mindre end a; det tilhører derfor en og kun en af de afsluttede Kurveringe Ω_{ii}^a, Ω_{iy}^a, Ω_{yi}^a, Ω_{yy}^a, som begrænses henholdsvis af Kurverne ω_{ii} og $\omega_{ii}(a)$, $\omega_{iy}(-a)$ og $\omega_{iy}(a)$, $\omega_{yi}(-a)$ og $\omega_{yi}(a)$, $\omega_{yy}(-a)$ og ω_{yy} (se Fig. 28). Vi vil vise, at $F_2(P)$ *er begrænset i Kurveringene* Ω_{ii}^a *og* Ω_{yy}^a, *medens den i Kurveringene* Ω_{iy}^a *og* Ω_{yi}^a *tilfredsstiller en Relation af Formen*

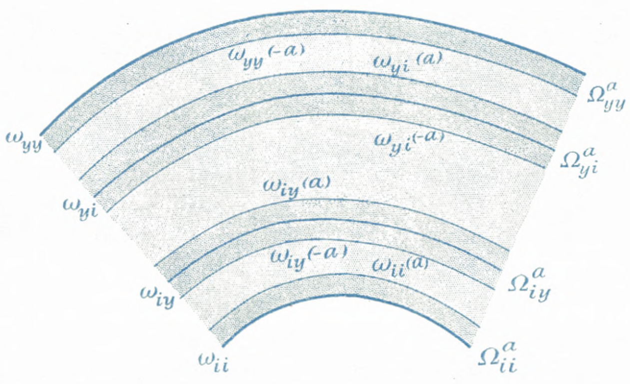

Fig. 28.

$$(13) \qquad \underline{F_2(P) \leqq K_2 + L_2 \log \frac{a}{d},}$$

hvor d betegner Afstanden fra P henholdsvis til ω_{iy} *og* ω_{yi}, *og* K_2 *og* L_2 *er uafhængige af P.*[1]

$F_2(P)$ bestemmes ved Integralet af Funktionen $F_1(P-P_2)\, f_2(P_2)$ over den Del af Kurven $P-\omega_2$, som tilhører Σ_1. Lad A_1 betegne Mængden af Punkter af Σ_1, hvis Afstand fra ω_i og ω_y er større end a. Paa Mængden A_1 er $F_1(P)$ begrænset; Integralet af $F_1(P-P_2)\, f_2(P_2)$ over den Del af $P-\omega_2$, som tilhører A_1, er følgelig ogsaa begrænset. Vi kan derfor nøjes med at betragte Integralet af $F_1(P-P_2)\, f_2(P_2)$ over den Del af $P-\omega_2$, som tilhører de afsluttede Kurveringe Ω_i^a og Ω_y^a, som begrænses henholdsvis af Kurverne ω_i og $\omega_i(a)$ og af Kurverne $\omega_y(-a)$ og ω_y; da Afstanden mellem Kurverne $\omega_i(a)$ og $\omega_y(-a)$ er mindst $2r_{1,i}-2a > 2r_{2,y}$, indeholder $P-\omega_2$ højst Punkter af den ene af disse Kurveringe. Tilhører P enten Ω_{ii}^a eller Ω_{iy}^a indeholder $P-\omega_2$ Punkter af Ω_i^a, tilhører P derimod Ω_{yi}^a eller Ω_{yy}^a indeholder $P-\omega_2$ Punkter af Ω_y^a. Vi vil nøjes med at betragte de Tilfælde, hvor $P-\omega_2$ indeholder Punkter af Ω_i^a.

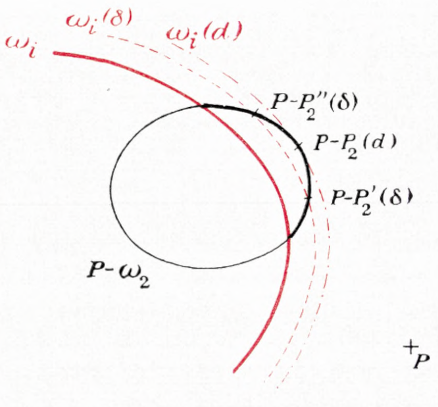

Fig. 29.

Vi vil først vise, at $F_2(P)$ *er begrænset i Kurveringen* Ω_{ii}^a. Lad (se Fig. 29) P være et Punkt af Ω_{ii}^a; dets Afstand d fra ω_{ii} er højst lig med a. Kurven $P-\omega_2$ indeholder ingen Punkter af A_1. Vi betragter Parallelkurverne $\omega_i(\delta)$ til ω_i for $0 \leqq \delta \leqq d$; den indre Radius $r_{i,i}+\delta$ i enhver af disse Kurver $\omega_i(\delta)$ er større end $r_{2,y}$. $P-\omega_2$ rører derfor $\omega_i(d)$ indvendig i et Punkt $P-P_2(d)$, medens den skærer hver af Kurverne $\omega_i(\delta)$, $0 \leqq \delta < d$ i to Punkter $P-P_2'(\delta)$ og $P-P_2''(\delta)$; Skæringsvinklerne betegner vi $p'(\delta)$ og $p''(\delta)$. Punkterne $P-P_2'(\delta)$ og $P-P_2''(\delta)$ tænkes hver for sig at variere kontinuert med δ. $F_2(P)$ bestemmes da som Sum af de to Integraler

$$F_2'(P) = \int_0^d \frac{F_1(P-P_2'(\delta))\, f_2(P_2'(\delta))}{\sin p'(\delta)}\, d\delta \quad \text{og} \quad F_2''(P) = \int_0^d \frac{F_1(P-P_2''(\delta))\, f_2(P_2''(\delta))}{\sin p''(\delta)}\, d\delta.$$

Vi vil vise, at disse hver for sig er begrænsede. Lad os f. Eks. betragte det første.

Den mindste Forskydning, som bringer Kurven $P-\omega_2$ til at røre Parallelkurven $\omega_i(\delta)$ til ω_i, har Størrelsen $d-\delta$.

Ifølge § 19 er da for ethvert Punkt P af Ω_{ii}^a og ethvert $\delta < d$

[1] I det følgende anvendes uafbrudt de almindelige Sætninger i § 16 om Skæring mellem konvekse Kurver og i § 20 om Parallelkurver til konvekse Kurver. Vi overlader det til Læseren i hvert enkelt Tilfælde, udfra Relationerne (11) og (12) i § 21 og Relationen $a < \frac{r_{2,i}}{2}$, at konstatere, at Betingelserne for Anvendelsen af disse Sætninger er tilstede.

$$\frac{\sqrt{d-\delta}}{\sin p'(\delta)} < \sqrt{\frac{2\,(r_{i,\,i}+\delta)\,r_{2,\,y}}{r_{i,\,i}+\delta-r_{2,\,y}}} < l,$$

hvor $l = \sqrt{\dfrac{2\,(r_{i,\,i}+a)\,r_{2,y}}{r_{i,\,i}-r_{2,\,y}}}$ er uafhængig saavel af P som af δ; naar som ovenfor φ_2 betegner øvre Grænse for Funktionen $f_2(P_2)$, har vi da

$$F_2'(P) < K_1\cdot\varphi_2\cdot l\cdot\int_0^d \frac{d\,\delta}{\sqrt{\delta}\,\sqrt{d-\delta}} = K_1\cdot\varphi_2\cdot l\cdot\pi,$$

hvormed Sætningen er bevist.

Vi gaar nu over til Betragtning af Funktionen $F_2(P)$ i Kurveringen Ω_{iy}^a. Lad P være et Punkt af Ω_{iy}^a, som ikke falder paa Kurven ω_{iy}. Afstanden d fra P til ω_{iy} er højst lig med a. Vi antager først (se Fig. 30), at P falder indenfor ω_{iy}. Kurven $P-\omega_2$ rører den indre Parallelkurve $\omega_i(-d)$ til ω_i udvendig i et Punkt $P-P_2(-d)$. Da $d \leqq a < \dfrac{r_{2,\,i}}{2}$ skærer $P-\omega_2$ samtlige Parallelkurver $\omega_i(\delta)$, $0 \leqq \delta \leqq a$, og den mindste Forskydning, som bringer den til at røre en af disse Kurver $\omega_i(\delta)$, har Størrelsen $d+\delta$. Idet vi iøvrigt anvender de samme Betegnelser som ovenfor, faar vi Integralet af $F_1(P-P_2)\,f_2(P_2)$ over den Del af $P-\omega_2$, som tilhører Ω_i^a, bestemt som Sum af de to Integraler

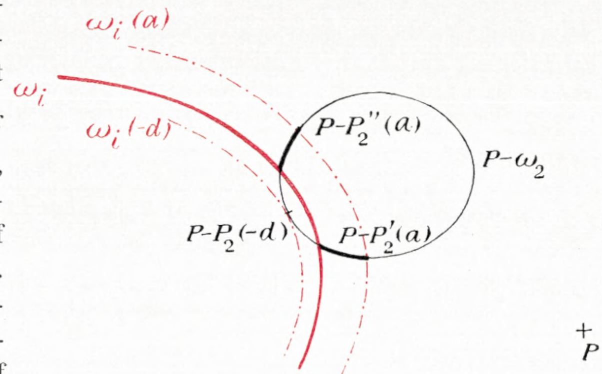

Fig. 30.

$$F_2'(P) = \int_0^a \frac{F_1\big(P-P_2'(\delta)\big)\,f_2\big(P_2'(\delta)\big)}{\sin p'(\delta)}\,d\,\delta \quad\text{og}\quad F_2''(P) = \int_0^a \frac{F_1\big(P-P_2''(\delta)\big)\,f_2\big(P_2''(\delta)\big)}{\sin p''(\delta)}\,d\,\delta.$$

Vi vil vise, at disse hver for sig tilfredsstiller en Relation af Formen (13). Lad os f. Eks. betragte det første Integral. Man viser ganske som ovenfor, at for ethvert af de betragtede Punkter P og ethvert δ, $0 \leqq \delta \leqq a$,

$$\frac{\sqrt{d+\delta}}{\sin p'(\delta)} < l.$$

Heraf faas imidlertid straks

$$F_2'(P) < K_1\cdot\varphi_2\cdot l\cdot\int_0^a \frac{d\,\delta}{\sqrt{\delta}\,\sqrt{d+\delta}} =$$

$$K_1\cdot\varphi_2\cdot l\cdot\int_0^{\frac{a}{d}} \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x}} < K_1\cdot\varphi_2\cdot l\cdot\left\{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{\frac{a}{d}} \frac{dx}{x}\right\} = K_1\cdot\varphi_2\cdot l\cdot\left\{2+\log\frac{a}{d}\right\},$$

hvormed Sætningen er bevist.

Falder P (se Fig. 31) udenfor ω_{iy}, rører $P - \omega_2$ den ydre Parallelkurve $\omega_i(d)$ til ω_i udvendig i et Punkt $P - P_2(d)$; den skærer Parallelkurverne $\omega_i(\delta)$ for $d < \delta \leq a$. Integralet af $F_1(P - P_2)\, f_2(P_2)$ over den Del af $P - \omega_2$, som tilhører Ω_i^a, bestemmes som Sum af de to Integraler

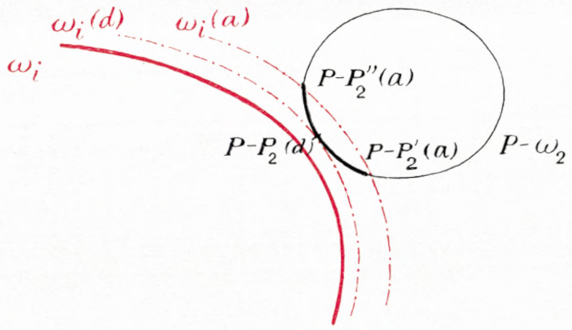

Fig. 31.

$$F_2'(P) = \int_d^a \frac{F_1(P - P_2'(\delta))\, f_2(P_2'(\delta))}{\sin p'(\delta)}\, d\delta$$

og

$$F_2''(P) = \int_d^a \frac{F_1(P - P_2''(\delta))\, f_2(P_2''(\delta))}{\sin p''(\delta)}\, d\delta.$$

Nu er i dette Tilfælde

$$\frac{\sqrt{\delta - d}}{\sin p'(\delta)} < l;$$

følgelig er

$$F_2'(P) < K_1 \cdot \varphi_2 \cdot l \cdot \int_d^a \frac{d\delta}{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta - d}} = K_1 \cdot \varphi_2 \cdot l \cdot \int_1^{\frac{a}{d}} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} =$$

$$K_1 \cdot \varphi_2 \cdot l \cdot \int_0^{\frac{a}{d}-1} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{x}} < K_1 \cdot \varphi_2 \cdot l \cdot \left\{2 + \log \frac{a}{d}\right\},$$

som er en Relation af Formen (13). Hermed er den opstillede Sætning fuldstændig bevist.

Konstruktion af $F_3(P)$.

36. Paa Grundlag af de foregaaende Resultater er vi nu i Stand til at vise Eksistensen af en kontinuert Funktion $F_3(P)$, hvis Integral over ethvert Rektangel R i Planen er lig med den til Rektanglet svarende Sandsynlighed $W_3(R)$.

Vi betragter den ovenfor indførte (kontinuerte) Funktion $F_2^d(P)$, hvis Integral

$$W_2^d(R) = \iint_R F_2^d(P)\, dR,$$

naar d konvergerer mod Nul, konvergerer ligelig mod Rektangelsandsynligheden $W_2(R)$. Funktionen

$$F_3^d(P) = \int_0^1 F_2^d(P - P_3)\, d\theta_3, \tag{14}$$

som ogsaa bestemmes ved Kurveintegralet

$$\int_{P - \omega_3} F_2^d(P - P_3)\, f_3(P_3)\, d(P - \omega_3),$$

er en kontinuert Funktion af P i hele Planen.

Integralet

$$W_3^d(R) = \iint_R F_3^d(P)\, dR \tag{15}$$

af denne Funktion vil konvergere ligelig mod Rektangelsandsynligheden $W_3(R)$, naar d konvergerer mod Nul. Thi idet

$$W_3^d(R) = \iint_R dR \int_0^1 F_2^d(P-P_3)\, d\theta_3 = \int_0^1 d\theta_3 \iint_R F_2^d(P-P_3)\, dR =$$

$$\int_0^1 d\theta_3 \iint_{R-P_3} F_2^d(P)\, d(R-P_3) = \int_0^1 W_2^d(R-P_3)\, d\theta_3,$$

vil $W_3^d(R)$, naar d konvergerer mod Nul, konvergere ligelig mod Integralet

$$\int_0^1 W_2(R-P_3)\, d\theta_3;$$

men dette Integral fremstiller netop Funktionen $W_3(R)$.

37. Naar d konvergerer (monotont) mod Nul, konvergerer $F_3^d(P)$ monotont mod en Funktion $F_3(P)$, der, som man let ser, fremstilles ved Integralet

$$F_3(P) = \int_0^1 F_2(P-P_3)\, d\theta_3 \tag{16}$$

af den stykkevis kontinuerte, men ikke altid begrænsede Funktion $F_2(P-P_3)$. Vi vil vise, at $F_3^d(P)$ i hele Planen konvergerer ligelig mod $F_3(P)$. Heraf vil straks følge, at $F_3(P)$ *er en i hele Planen kontinuert Funktion af Punktet P, hvis Integral*

$$\iint_R F_3(P)\, dR$$

over ethvert Rektangel R i Planen, som Grænseværdi for Integralet

$$\iint_R F_3^d(P)\, dR,$$

er lig med den tilsvarende Sandsynlighed $W_3(R)$.

Fremstiller vi $F_3(P)$ ved Kurveintegralet

$$\int_{P-\omega_3} F_2(P-P_3)\, f_3(P_3)\, d(P-\omega_3),$$

faar vi for Differensen $F_3(P) - F_3^d(P)$ Udtrykket

$$F_3(P) - F_3^d(P) = \int_{P-\omega_3} \{F_2(P-P_3) - F_2^d(P-P_3)\}\, f_3(P_3)\, d(P-\omega_3).$$

Da saavel $F_2(P)$ som $F_2^d(P)$ er Nul i Omraaderne $I(\omega_{ii})$ og $Y(\omega_{yy})$, kan vi nøjes med at integrere over den Del af $P-\omega_3$, som tilhører Σ_2. Hvad vi skal vise er, at den angivne Differens konvergerer ligelig mod Nul med d.

Lad φ_3 betegne øvre Grænse for Funktionen $f_3(P_3)$, og lad α være et (variabelt) positivt Tal mindre end det i § 35 indførte Tal a. Lad A_2 betegne Mængden af Punkter af Σ_2, hvis Afstand fra Kurverne ω_{ii}, ω_{iy}, ω_{yi}, ω_{yy} er større end α; et Punkt af Σ_2, som ikke tilhører A_2, tilhører en og kun en af de fire Kurveringe Ω_{ii}^{α}, Ω_{iy}^{α}, Ω_{yi}^{α}, Ω_{yy}^{α}, som begrænses henholdsvis af Kurverne ω_{ii} og $\omega_{ii}(\alpha)$, $\omega_{iy}(-\alpha)$ og $\omega_{iy}(\alpha)$, $\omega_{yi}(-\alpha)$ og $\omega_{yi}(\alpha)$, $\omega_{yy}(-\alpha)$ og ω_{yy}. Den Del af $P-\omega_3$, som tilhører disse Kurveringe, betegner vi $P-\omega_3(\alpha)$, den Del af $P-\omega_3$, som tilhører A_2, betegner vi $P-\omega_3^*(\alpha)$. Da er

$$F_3(P)-F_3^d(P) \leqq \varphi_3 \left\{ \int\limits_{P-\omega_3^*(\alpha)} \{F_2(P-P_3)-F_2^d(P-P_3)\}\, d\big(P-\omega_3^*(\alpha)\big) + \int\limits_{P-\omega_3(\alpha)} F_2(P-P_3)\, d\big(P-\omega_3(\alpha)\big) \right\}.$$

Vi vil vise, at det sidste Integral, hvori d ikke indgaar, konvergerer ligelig mod Nul med α. Hermed vil den opstillede Sætning være bevist; thi er $\varepsilon > 0$ et givet Tal, og bestemmer vi *først* α saaledes, at for alle P

$$\int\limits_{P-\omega_3(\alpha)} F_2(P-P_3)\, d\big(P-\omega_3(\alpha)\big) < \frac{\varepsilon}{2\varphi_3},$$

og *dernæst*, hvad der er muligt, da $F_2^d(P)$ konvergerer ligelig mod $F_2(P)$ paa Mængden A_2, d_0 saa lille, at, naar $d < d_0$,

$$\int\limits_{P-\omega_3^*(\alpha)} \{F_2(P-P_3)-F_2^d(P-P_3)\}\, d\big(P-\omega_3^*(\alpha)\big) < \frac{\varepsilon}{2\varphi_3},$$

er for ethvert Punkt P i Planen og ethvert $d < d_0$

$$F_3(P)-F_3^d(P) < \varepsilon;$$

men det betyder netop, at $F_3(P)-F_3^d(P)$ konvergerer ligelig mod Nul med d.

38. Kurven $P-\omega_3$ indeholder højst Punkter af en af Kurveringene Ω_{ii}^{α}, Ω_{iy}^{α}, Ω_{yi}^{α}, Ω_{yy}^{α}; $P-\omega_3(\alpha)$ tilhører altsaa helt en af disse Kurveringe. Ved Beviset for, at Integralet

$$\int\limits_{P-\omega_3(\alpha)} F_2(P-P_3)\, d\big(P-\omega_3(\alpha)\big)$$

konvergerer ligelig mod Nul med α, vil vi nøjes med at betragte de Tilfælde, hvor $P-\omega_3(\alpha)$ tilhører enten Ω_{ii}^{α} eller Ω_{iy}^{α}; de to andre Tilfælde behandles paa tilsvarende Maade.

Vi betragter først (Fig. 32) det Tilfælde, hvor $P-\omega_3(\alpha)$ tilhører Ω_{ii}^{α}. $F_2(P)$ er som ovenfor vist begrænset i Kurveringen Ω_{ii}^{a}. Hvad vi skal vise er derfor blot, at Integralet

$$\int\limits_{P-\omega_3(\alpha)} d\big(P-\omega_3(\alpha)\big),$$

som er lig med Længden af den eller de Buer af $P - \omega_3$, der tilhører Ω_{ii}^{α}, konvergerer ligelig mod Nul med α.

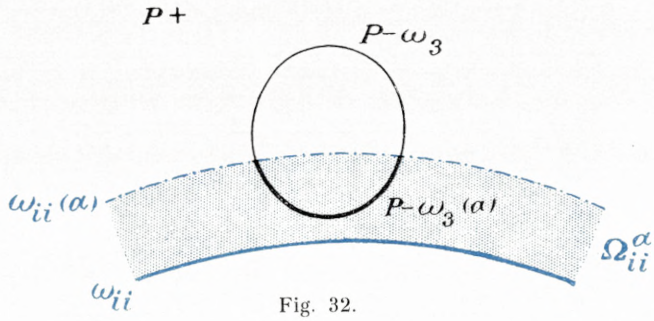

Fig. 32.

Lad δ_0 være den mindste, δ_1 den største Afstand fra et Punkt af $P - \omega_3(\alpha)$ til Kurven ω_{ii}. En Parallelkurve $\omega_{ii}(\delta)$ til ω_{ii} vil, naar $\delta_0 < \delta < \delta_1$, skære $P - \omega_3(\alpha)$ i to Punkter $P - P_3'(\delta)$ og $P - P_3''(\delta)$ under Vinkler $p'(\delta)$ og $p''(\delta)$. Betegnelserne tænkes valgt saaledes, at $P - P_3'(\delta)$ og $P - P_3''(\delta)$ hver for sig varierer kontinuert med δ. Da er

$$\int_{P - \omega_3(\alpha)} d\left(P - \omega_3(\alpha)\right) = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{d\delta}{\sin p'(\delta)} + \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{d\delta}{\sin p''(\delta)}.$$

De to sidste Integraler konvergerer ligelig mod Nul med α; lad os f. Eks. føre Beviset for det første. Den mindste Forskydning, som bringer Kurven $P - \omega_3$ til at røre $\omega_{ii}(\delta)$, hvor $\delta_0 < \delta < \delta_1$, er større end eller lig med det mindste af Tallene $\delta - \delta_0$ og $\delta_1 - \delta$ og derfor ogsaa større end eller lig med

$$\frac{(\delta - \delta_0)\,(\delta_1 - \delta)}{\delta_1 - \delta_0}.$$

Følgelig er, som det fremgaar af Undersøgelsen ovenfor, for ethvert δ

$$\frac{\sqrt{\dfrac{(\delta - \delta_0)\,(\delta_1 - \delta)}{\delta_1 - \delta_0}}}{\sin p'(\delta)} < m_i,$$

hvor m_i er en Konstant, som hverken afhænger af α eller af P. Vi faar derfor

$$\int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{d\delta}{\sin p'(\delta)} < m_i \cdot \sqrt{\delta_1 - \delta_0} \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{d\delta}{\sqrt{(\delta - \delta_0)\,(\delta_1 - \delta)}} \leq m_i \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \pi,$$

hvoraf straks følger, at Integralet konvergerer ligelig mod Nul med α.

Vi gaar nu over til at betragte det Tilfælde, hvor $P - \omega_3(\alpha)$ tilhører Ω_{iy}^{α} (se Fig. 33). Vi bestemmer de Parallelkurver $\omega_{iy}(\delta)$ til ω_{iy}, som skærer $P - \omega_3(\alpha)$; nedre og øvre Grænse for de tilsvarende Værdier af δ betegner vi δ_0 og δ_1. Saavel δ_0 som δ_1 kan være negative Tal. Benytter vi de samme Betegnelser som ovenfor, faar vi

$$\int_{P - \omega_3(\alpha)} F_2(P - P_3)\, d\left(P - \omega_3(\alpha)\right) = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{F_2\left(P - P_3'(\delta)\right)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta + \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{F_2\left(P - P_3''(\delta)\right)}{\sin p''(\delta)}\, d\delta.$$

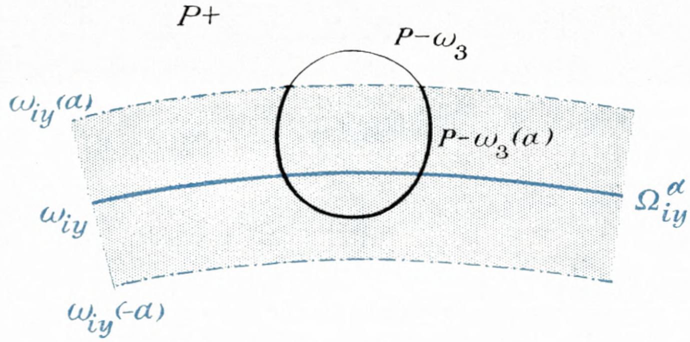

Fig. 33.

De to sidste Integraler gaar ligelig mod Nul med α; vi vil nøjes med at betragte det første. Lad os foreløbig antage, at δ_0 og δ_1 har samme Fortegn, at de f. Eks. begge er positive, eller at en af dem, f. Eks. δ_0, er lig med Nul. For ethvert δ, $\delta_0 < \delta < \delta_1$, er

$$\frac{\sqrt{\dfrac{(\delta-\delta_0)(\delta_1-\delta)}{\delta_1-\delta_0}}}{\sin p'(\delta)} < m_y,$$

hvor m_y, som ovenfor m_i, er uafhængig saavel af α som af det betragtede Punkt P. Følgelig er

$$\int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{F_2\left(P-P_3'(\delta)\right)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta < m_y \sqrt{\delta_1-\delta_0} \int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{K_2 + L_2 \log \dfrac{a}{\delta}}{\sqrt{(\delta-\delta_0)(\delta_1-\delta)}}\, d\delta$$

eller, idet vi sætter $\delta = \delta_0 + (\delta_1 - \delta_0)\sin^2 x$,

$$\int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{F_2\left(P-P_3'(\delta)\right)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta < m_y \sqrt{\delta_1-\delta_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(K_2 + L_2 \log \frac{a}{\delta_0 + (\delta_1-\delta_0)\sin^2 x}\right) dx$$

$$\leq m_y \left\{ K_2 \cdot \pi \sqrt{\delta_1-\delta_0} + L_2 \cdot \pi \sqrt{\delta_1-\delta_0} \log \frac{a}{\delta_1-\delta_0} + 2 L_2 \sqrt{\delta_1-\delta_0}\, I \right\},$$

hvor I $(= \pi \log 2)$ betegner den endelige Værdi af Integralet $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$. Alle Leddene indenfor Parentesen konvergerer mod Nul med Størrelsen $\delta_1 - \delta_0$; følgelig konvergerer det betragtede Integral ligelig mod Nul med α. Har δ_0 og δ_1 modsat Fortegn viser Omskrivningen

$$\int_{\delta_0}^{\delta_1} \frac{F_2\left(P-P_3'(\delta)\right)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta = \int_{\delta_0}^{0} \frac{F_2\left(P-P_3'(\delta)\right)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta + \int_0^{\delta_1} \frac{F_2\left(P-P_3'(\delta)\right)}{\sin p'(\delta)}\, d\delta,$$

at Integralet ogsaa i dette Tilfælde konvergerer ligelig mod Nul med α. Hermed er Beviset for den opstillede Sætning, og dermed Konstruktionen af en kontinuert Punktsandsynlighed i Planen, fuldført.

39. Vi gaar nu over til at betragte det almindelige Tilfælde, hvor vi om Radierne $r_{n,i}$ og $r_{n,y}$ i de konvekse Kurver ω_n kun forudsætter, at de konvergerer mod Nul, naar n vokser ud over alle Grænser. Hvad vi skal vise er, at der findes et

Tal $N = N_0$, som alene afhænger af de givne Kurver, og for hvilket Betingelsen

$$(4) \qquad W_N(R) = \iint_R F_N(P)\, dR$$

kan tilfredsstilles. Dette er imidlertid en umiddelbar Følge af det allerede opnaaede Resultat. Vi behøver blot at vælge N_0 saa stor, at der blandt Kurverne $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{N_0}$ findes fire $\omega_0', \omega_1', \omega_2', \omega_3'$, hvis tilsvarende Radier tilfredsstiller Betingelserne

$$r'_{0,i} \geqq 2\, r'_{1,y}; \quad r'_{1,i} \geqq 2\, r'_{2,y}; \quad r'_{2,i} \geqq 2\, r'_{3,y}.$$

Adderer vi da Kurverne $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{N_0}$ i en saadan Orden $\omega_0', \omega_1', \ldots, \omega'_{N_0}$, at disse fire Kurver bliver de første, vil de tilsvarende Sandsynligheder $W'_n(R)$, $n = 0, 1, \ldots, N_0$, for $n \geqq 3$ kunne fremstilles som Integraler af kontinuerte Funktioner $F'_n(P)$. Nu er (§ 10) $W_{N_0}(R) = W'_{N_0}(R)$; $W_{N_0}(R)$ vil altsaa kunne fremstilles som Integral af den kontinuerte Funktion $F_{N_0}(P) = F'_{N_0}(P)$.

Punktsandsynligheder i Planen. Demonstration.

40. Vi har hidtil alene beskæftiget os med Opfyldelsen af Betingelsen

$$(4) \qquad W_N(R) = \iint_R F_N(P)\, dR,$$

d. v. s. med Bestemmelsen af kontinuerte Funktioner $F_N(P)$, hvis Integral over ethvert Rektangel i Planen er lig med den til Rektanglet svarende Sandsynlighed $W_N(R)$. Hvad vi har vist er, at der fra et vist Trin eksisterer saadanne kontinuerte Funktioner $F_N(P)$.

Vi vil nu vise, at en Funktion $F_N(P)$, som tilfredsstiller Betingelsen (4), af sig selv vil tilfredsstille den stærkere Betingelse

$$(3) \qquad W_N(M) = \iint_M F_N(P)\, dM,$$

at den m. a. O. vil være integrabel netop over de Punktmængder M i Planen, for hvilke den tilsvarende Sandsynlighed $W_N(M)$ er defineret og med denne Sandsynlighed til Integral. Dette vil betyde, at *de i det foregaaende Afsnit konstruerede Funktioner $F_N(P)$ er kontinuerte Punktsandsynligheder svarende til Mængdesandsynlighederne $W_N(M)$*.

At Eksistensen af Integralet

$$J(M) = \iint_M F_N(P)\, dM$$

af Funktionen $F_N(P)$ over en Mængde M i Σ_N-Planen medfører Eksistensen af en ligesaastor Sandsynlighed $W_N(M)$, er en simpel Følge af Integralets Definition i Forbindelse med Afbildningen af Mængden Σ_N paa Enhedsterningen Q_N i det tilsvarende $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$-Rum. Thi $J(M)$ er bestemt som øvre Grænse for Integralerne J_i af $F_N(P)$ over saadanne Punktmængder M_i, sammensat af et endeligt Antal Rektangler, som tilhører M; til disse Mængder svarer Delmængder Ω_i af Q_N, som tilhører den til M svarende Mængde Ω, og som er maalelige med Maalet J_i; det indre Maal for Ω er saaledes mindst lig med $J(M)$. Paa den anden Side ser man ved Anvendelse af den samme Betragtning paa Komplementærmængderne til M og Ω, at det ydre Maal for Ω højst er lig med $J(M)$ (smlgn. § 24). Men dette i Forbindelse med det foregaaende Resultat viser, at Ω er maalelig og har Maalet $J(M)$.

Beviset for, at ogsaa omvendt Eksistensen af Sandsynligheden $W_N(M)$ svarende til Mængden M medfører Eksistensen af et ligesaastort Integral, forløber ikke slet saa simpelt. Lad den til M svarende Punktmængde i Q_N være Ω; dens Maal $m(\Omega)$ bestemmer Sandsynligheden $W_N(M)$. $m(\Omega)$ bestemmes som øvre Grænse for Maalene $m(\Omega_i')$ af de Delmængder Ω_i' af Ω, som lader sig sammensætte af et endeligt Antal akseparallelle Parallellepipeder. Ved den entydige Afbildning af Q_N paa Σ_N afbildes hvert af disse Parallellepipeder paa en Mængde fremkommen ved Addition af $N+1$ konvekse Buer tilhørende Kurverne $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N$, altsaa (§ 4) sikkert paa en begrænset maalelig Punktmængde. Mængderne Ω_i' afbildes derfor paa maalelige Delmængder M_i af M. Funktionen $F_N(P)$, som er kontinuert og følgelig ogsaa begrænset, er sikkert integrabel over enhver maalelig Mængde i Planen, specielt over Mængderne M_i. De tilsvarende Integraler J_i er ifølge den ovenfor beviste Sætning lig med Maalene $m(\Omega_i)$ for de til Mængderne M_i svarende Delmængder Ω_i af Ω. Hver af disse Mængder Ω_i indeholder den tilsvarende Mængde Ω_i'. $m(\Omega)$ kan altsaa bestemmes som øvre Grænse for alle $m(\Omega_i)$, d. v. s. for alle J_i. Det indre Integral af $F_N(P)$ over Mængden M er derfor mindst lig med $m(\Omega)$. Ved Anvendelse af den samme Betragtning paa Komplementærmængderne til M og Ω ses, at det ydre Integral af $F_N(P)$ over M højst er lig med $m(\Omega)$. Heraf følger imidlertid at $F_N(P)$ er integrabel over M med Integralet $m(\Omega)$.

Indfører man svarende til enhver Punktmængde M i Planen en *indre Sandsynlighed* $W_{N,i}(M)$ og en *ydre Sandsynlighed* $W_{N,y}(M)$ for at et vilkaarligt Punkt af Σ_N tilhører M, bestemt henholdsvis som det indre og det ydre Maal for den til Mængden svarende Delmængde af Q_N, vil disse Sandsynligheder, som man ved den ovenfor anvendte Betragtning let viser, kunne fremstilles henholdsvis som det indre og det ydre Integral af $F_N(P)$ over Mængden M. Denne Bemærkning, som vi senere kommer til at anvende, viser os den egentlige »Grund« til Identiteten af de to Funktioner $W_N(M)$ og $\iint_M F_N(P)\,dM$.

Af den beviste Sætning i Forbindelse med den tidligere Bemærkning (§ 25), at Sandsynlighederne $F_N(P)$ for alle $N \geq N_0+2$ er positive i det Indre af de tilsvarende Mængder Σ_N (og ikke blot positive eller Nul), følger uden Vanskelighed om Mængdesandsynlighederne $W_N(M)$, at de for disse Værdier af N vil være definerede for de og kun de Mængder M i Planen, som har en *maalelig* Mængde af Punkter fælles med Σ_N. Dette gælder forøvrigt ogsaa for $N = N_0$ og $N = N_0+1$ (og af samme Grund), da, som man udfra det foregaaende Afsnits Definitioner let viser, allerede den der indførte Funktion $F_3(P)$ er positiv i det Indre af den tilsvarende Mængde Σ_3.

Idet vi sammenfatter de opnaaede Resultater, har vi bevist følgende Sætning: *Adderer man en Følge*

$$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N, \ldots$$

af konvekse Kurver ω_n *af Klassen* K, *hvis Radier* $r_{n,i}$ *og* $r_{n,y}$ *konvergerer mod Nul, naar* n *vokser ud over alle Grænser, og er der paa Kurverne givet kontinuerte Punktsandsynligheder* $f_n(P_n)$, *da vil de til Punktmængderne*

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, \ldots$$

svarende Mængdesandsynligheder

$$W_0(M), W_1(M), \ldots, W_N(M), \ldots$$

i Planen fra et vist Trin (d. v. s. for alle $N \geqq N_0$) *kunne fremstilles som Integraler af kontinuerte Punktsandsynligheder* $F_N(P)$. *Disse vil være positive for indre Punkter af de tilsvarende Mængder* Σ_N *og vil være bestemt udfra* $F_{N_0}(P)$ *ved Hjælp af Relationen*

$$F_{n+1}(P) = \int_0^1 F_n(P - P_{n+1})\, d\theta_{n+1}, \tag{5}$$

hvor P_{n+1} *betegner det Punkt af* ω_{n+1}, *som svarer til Parameterværdien* θ_{n+1}.

KAPITEL V.

Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af uendelig mange konvekse Kurver.

Vi betragter paany en Følge $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N, \ldots$ af konvekse Kurver ω_n af Klassen K, hvis Radier $r_{n,i}$ og $r_{n,y}$ konvergerer mod Nul for $n \to \infty$. Lad der paa hver af disse Kurver være givet en kontinuert Punktsandsynlighed $f_n(P_n)$; de til Punktmængderne Σ_N svarende Mængdesandsynligheder $W_N(M)$ kan da, som vi har set, for alle N fra et vist Trin N_0 fremstilles som Integraler af kontinuerte Punktsandsynligheder $F_N(P)$ i Planen. Vi vil nu vise, hvorledes denne Fremstilling i særlige Tilfælde kan give Anledning til Indførelse af en Mængdesandsynlighed $W(M)$ og en Punktsandsynlighed $F(P)$ bestemt ved de givne uendelig mange konvekse Kurvers Addition. Vi betragter først det særlig simple Tilfælde, hvor den uendelige Række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \tag{1}$$

er konvergent; de opnaaede Resultater overføres dernæst paa et mindre overskueligt, men for Anvendelserne nok saa vigtigt Tilfælde, hvor Rækken (1), til Trods for at den ikke mere forudsættes konvergent, dog paa naturlig Maade kan tilordnes en Sum; endelig anvendes de opnaaede Resultater paa et specielt Eksempel.

Sandsynlighedsfordelinger paa en ved en konvergent Række fremstillet Punktmængde.

41. Lad Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ være konvergent, og lad den have Summen Σ. Punktsandsynlighederne $F_N(P)$ bestemmes udfra Sandsynligheden $F_{N_0}(P)$ ved Hjælp af Relationen

$$F_{n+1}(P) = \int_0^1 F_n(P - P_{n+1})\, d\theta_{n+1}. \tag{2}$$

Vi vil vise, at de for $N \to \infty$ konvergerer ligelig mod en Grænsefunktion $F(P)$.

Vi benytter ved Beviset det almindelige Konvergensprincip, idet vi viser, at øvre Grænse for Størrelsen

$$|F_N(P) - F_{N+p}(P)|,$$

naar p gennemløber de hele positive Tal og P Planens Punkter, konvergerer mod Nul for $N \to \infty$.

Lad p være et bestemt positivt helt Tal. For ethvert Tal n, $N \leqq n < N+p$, og ethvert Punkt P i Planen er ifølge (2)

$$F_{n+1}(P) = F_n(P - P^*_{n+1}),$$

hvor $P^*_{n+1} = P^*_{n+1}(P)$ tilhører ω_{n+1}. Følgelig er for ethvert Punkt P i Planen

$$F_{N+p}(P) = F_N(P - P^*_{N,N+p}),$$

hvor $P^*_{N,N+p} = P^*_{N,N+p}(P)$ tilhører Mængden $\Sigma_{N,N+p} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \omega_n$, og vi har

$$F_N(P) - F_{N+p}(P) = F_N(P) - F_N(P - P^*_{N,N+p});$$

$$\underset{P,\,p}{\text{Øvre Grænse}}\, |F_N(P) - F_{N+p}(P)| = \underset{P,\,p}{\text{Øvre Grænse}}\, |F_N(P) - F_N(P - P^*_{N,N+p})|.$$

Den største Afstand fra Begyndelsespunktet O til et Punkt af Mængden $\Sigma_{N,N+p}$ betegner vi $\delta_{N,N+p}$; sætter vi

$$\delta_N = \underset{p}{\text{Øvre Grænse}}\ \delta_{N,N+p}$$

er da

$$\underset{P,p}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_N(P) - F_N(P - P^*_{N,N+p})| \leqq \underset{P}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_N(P) - F_N(P')|,$$

hvor P' er et *vilkaarligt* Punkt, hvis Afstand fra P er højst δ_N. Nu er ifølge (2) for ethvert $n \geqq N_0$

$$\underset{PP' \leqq \delta_N}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_{n+1}(P) - F_{n+1}(P')| \leqq \underset{PP' \leqq \delta_N}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_n(P) - F_n(P')|.$$

Vi har derfor for ethvert $N \geqq N_0$

$$\underset{PP' \leqq \delta_N}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_N(P) - F_N(P')| \leqq \underset{PP' \leqq \delta_N}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_{N_0}(P) - F_{N_0}(P')|$$

og endelig

$$\underset{P,p}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_N(P) - F_{N+p}(P)| \leqq \underset{PP' \leqq \delta_N}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_{N_0}(P) - F_{N_0}(P')|.$$

Nu er den konvergente Række $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n$, hvor P_n, $n = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ gennemløber Kurven ω_n, ifølge § 5 *ligelig konvergent;* det betyder, at Størrelsen δ_N konvergerer mod Nul for $N \to \infty$. Da Funktionen $F_{N_0}(P)$ er kontinuert i hele Planen og lig med Nul i alle Punkter udenfor den begrænsede Mængde Σ_{N_0}, er den ligelig kontinuert. Størrelsen

$$\underset{PP' \leqq \delta_N}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_{N_0}(P) - F_{N_0}(P')|$$

konvergerer derfor mod Nul for $N \to \infty$. Det samme gælder da ogsaa Størrelsen

$$\underset{P,p}{\text{Øvre Grænse}}\ |F_N(P) - F_{N+p}(P)|,$$

og Beviset er fuldført.

42. Grænsefunktionen $F(P)$ for $F_N(P)$ er en i hele Planen kontinuert Funktion af Punktet P. Parallelforskyder vi Kurverne ω_n til nye Stillinger ω'_n paa en saadan Maade, at Forskydningerne danner en konvergent Række, vil Summen Σ' af den nye Række $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega'_n$ og den tilsvarende Funktion $F'(P)$ fremgaa af Σ og $F(P)$ ved en og samme Parallelforskydning. Dette er en Følge af den ensartede Ligelighed i Kontinuiteten af Funktionerne $F_N(P)$, som fremgaar af Relationen (2). Vælges Forskydningerne specielt saaledes, at Kurverne ω'_n kommer til at gaa gennem Begyndelsespunktet, indser man uden Vanskelighed om Funktionen $F(P)$, at den er lig med Nul for alle Punkter udenfor eller paa Randen af Mængden Σ, ogsaa i det Tilfælde, hvor Σ bestaar af et enkelt afsluttet konvekst Omraade, men (se § 6) har en »indre Rand«. Derimod er $F(P)$, som det let fremgaar af den tilsvarende Egenskab ved Funktionerne $F_N(P)$, sikkert positiv i ethvert indre Punkt af Σ. *Integralet af $F(P)$ over Mængden Σ er lig med 1;* thi bestemmer vi et Rektangel R saa stort, at det indeholder samtlige Mængder Σ_{N_0}, Σ_{N_0+1}, $\ldots$, Σ, har vi

$$\iint_{\Sigma} F(P)\,d\Sigma = \iint_R F(P)\,dR = \lim_{N\to\infty}\iint_R F_N(P)\,dR = \lim_{N\to\infty}\iint_{\Sigma_N} F_N(P)\,d\Sigma_N;$$

nu er for ethvert $N \geqq N_0$

$$\iint_{\Sigma_N} F_N(P)\,d\Sigma_N = 1;$$

altsaa er ogsaa

$$\iint_{\Sigma} F(P)\,d\Sigma = 1.$$

Funktionen $F(P)$ betegnes som en *kontinuert Punktsandsynlighed* svarende til Punktmængden Σ.

43. Svarende til en given Punktmængde M i Planen betragter vi for ethvert $N \geqq N_0$ den indre Sandsynlighed $W_{N,i}(M)$ og den ydre Sandsynlighed $W_{N,y}(M)$ for, at et vilkaarligt Punkt af Σ_N tilhører M (se § 40); disse Sandsynligheder bestemmes henholdsvis som det indre Integral $J_{N,i}(M)$ og det ydre Integral $J_{N,y}(M)$ af Funktionen $F_N(P)$ over Mængden M. Naar N vokser ud over alle Grænser konvergerer disse Integraler henholdsvis mod det indre Integral $J_i(M)$ og det ydre Integral $J_y(M)$ af Funktionen $F(P)$ over Mængden M. Thi betegner M_0 den fælles Del for Mængden M og det ovenfor betragtede Rektangel R, har man for ethvert N

$$J_{N,i}(M) = J_{N,i}(M_0) \quad \text{og} \quad J_i(M) = J_i(M_0)$$

og for de ydre Integraler

$$J_{N,y}(M) = J_{N,y}(M_0); \quad J_y(M) = J_y(M_0).$$

Nu er for ethvert $N \geqq N_0$

$$\left.\begin{array}{l} |J_{N,i}(M_0) - J_i(M_0)| \\ |J_{N,y}(M_0) - J_y(M_0)| \end{array}\right\} \leqq \text{Øvre Grænse}\, |F_N(P) - F(P)| \cdot m(R),$$

hvor $m(R)$ betegner Arealet af Rektanglet R. Men da følger det straks af den ligelige Konvergens, at $J_{N,i}(M_0)$ og $J_{N,y}(M_0)$ for $N \to \infty$ konvergerer henholdsvis mod $J_i(M_0)$ og $J_y(M_0)$. Grænseværdierne

$$W_i(M) = \lim_{N\to\infty} W_{N,i}(M) \quad \text{og} \quad W_y(M) = \lim_{N\to\infty} W_{N,y}(M) \tag{3}$$

for $W_{N,i}(M)$ og $W_{N,y}(M)$ for $N \to \infty$ betegnes henholdsvis som den indre og den ydre Sandsynlighed for, at et vilkaarligt Punkt af Σ tilhører M. Er de to Sandsynligheder ligestore betegner vi deres fælles Værdi $W(M)$ som Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Punkt af Σ tilhører M. Af Integralfremstillingen

$$W_i(M) = J_i(M), \quad W_y(M) = J_y(M)$$

for de to Sandsynligheder fremgaar umiddelbart, at Mængdefunktionen $W(M)$ bestemmes som

$$W(M) = \iint_M F(P)\,dM. \tag{4}$$

Vi betegner den som den til Punktmængden Σ svarende *Mængdesandsynlighed* i Planen. Dens Definitionsomraade er Mængden af maalelige Delmængder af Σ forøget med vilkaarlige Mængder udenfor Σ.

For ethvert Rektangel R er

$$W(R) = \lim_{N \to \infty} W_N(R);$$

derimod gælder den almindeligere Relation

$$W(M) = \lim_{N \to \infty} W_N(M)$$

kun, forsaavidt de indgaaende Sandsynligheder er definerede. Indførelsen af indre og ydre Sandsynlighed, som tillader Opstillingen af de for alle Mængder gyldige Relationer (3), er saaledes nødvendig for en naturlig Definition af Mængdesandsynligheden $W(M)$.

44. Den hermed opnaaede Indførelse af en Mængdesandsynlighed i Planen svarende til en ved Addition af uendelig mange konvekse Kurver fremkommen Punktmængde og Sammenhængen mellem denne og en tilsvarende Punktsandsynlighed beror paa den i foregaaende Kapitel paaviste Sammenhæng mellem de tilsvarende Sandsynligheder ved Addition af et endeligt Antal Kurver. Punktsandsynligheden er her blevet det afgørende Begreb, som betinger Mængdesandsynlighedens Indførelse. I Modsætning hertil kunde man ønske en Behandling, hvorved Mængdesandsynligheden blev fremhævet som det oprindelige Begreb, og hvor Muligheden af *i særlige Tilfælde* at fremstille denne som Integral af en Punktsandsynlighed i højere Grad end ovenfor kom til at fremtræde som Undersøgelsens *Resultat*. Dette opnaar man ved følgende almindeligere Betragtning:

Lad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \tag{1}$$

være en konvergent Række, hvis enkelte Led er konvekse Jordankurver, og lad der paa disse være givet kontinuerte Buesandsynligheder $w_n(b_n)$ bestemt gennem Afbildninger af Kurverne paa Parameterintervaller $0 \leqq \theta_n < 1$. Den naturlige Vej til Indførelse af en Mængdesandsynlighed paa den ved Rækken (1) fremstillede Punktmængde Σ er da den, at man gennem en Afbildning af Mængden Σ paa Enhedsterningen $Q\,(0 \leqq \theta_n < 1)$, i det uendeligdimensionale $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N, \ldots$ -Rum tilordner enhver Mængde M i Σ-Planen en Delmængde Ω af Q bestaaende af samtlige Punkter $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N, \ldots)$, hvis tilsvarende Punkt af Σ tilhører M, og saa, saafremt denne Mængde Ω er maalelig, betegner dens Maal $m(\Omega)$ som Sandsynligheden $W(M)$ for, at et vilkaarligt Punkt af Σ tilhører M (smlgn. § 10).

Naar vi ikke straks fra Begyndelsen har anvendt denne Definition er Grunden den, at Begreberne »maalelig Mængde«, »Punktmængdes Maal« er saa lidet bearbejdede, ja, maaske næppe endda kan siges at have nogen præcis Betydning, hvor Talen er om Punktmængder i et uendeligdimensionalt Rum. Imidlertid giver, som vi nu skal vise, den ovenstaaende Undersøgelse Anledning til, at man indfører et saadant Maal.

Lad Ω betegne en vilkaarlig Delmængde af den uendeligdimensionale Enhedsterning Q; med Ω_N betegner vi Projektionen af denne Mængde paa den $N+1$-dimensionale Enhedsterning Q_N, d. v. s. Mængden af Punkter $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$, hvor $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$ er de $N+1$ første Koordinater til et Punkt af Ω. Lad $m_y(\Omega_N)$ betegne det sædvanlige ($N+1$-dimensionale) JORDAN'ske Maal for Mængden Ω_N; Talfølgen

$$m_y(\Omega_0),\ m_y(\Omega_1),\ \ldots,\ m_y(\Omega_N),\ \ldots$$

er da stadig aftagende; vi betegner dens Grænseværdi

$$m_y(\Omega) = \lim_{N \to \infty} m_y(\Omega_N)$$

som *det ydre* JORDAN'*ske Maal for Punktmængden* Ω. Det *indre* JORDAN'ske Maal $m_i(\Omega)$ for Ω defineres ved Relationen

$$m_i(\Omega) = 1 - m_y(Q - \Omega).$$

For enhver Punktmængde Ω er $m_y(\Omega) + m_y(Q - \Omega) \geqq 1$, thi Projektionerne af Ω og $Q - \Omega$ paa Q_N (som godt kan have Punkter fælles) udfylder tilsammen hele Q_N; heraf følger Relationen $m_y(\Omega) \geqq m_i(\Omega)$. Er $m_y(\Omega) = m_i(\Omega)$ betegner vi Punktmængden Ω som *maalelig* i JORDAN'sk Forstand; den fælles Værdi $m(\Omega)$ for de to Maal betegner vi da som *Punktmængdens Maal*[1].

Er nu (1) en vilkaarlig konvergent Række, og er der paa de enkelte Kurver ω_n givet kontinuerte Buesandsynligheder, giver den indførte Maaldefinition straks en Sandsynlighedsfordeling $W(M)$ svarende til Rækkens Sum Σ. Der gælder da, som vi vil vise, den Sætning, at *naar Kurverne* ω_n *er Kurver af Klassen* K, *hvis Radier konvergerer mod Nul for* $n \to \infty$, *og naar Sandsynlighederne* $w_n(b_n)$ *kan fremstilles som Integraler af kontinuerte Punktsandsynligheder* $f_n(P_n)$, *da vil ogsaa Mængdesandsynligheden* $W(M)$, *saaledes som den nu er defineret, kunne fremstilles som Integral af*

[1] Det indførte indre og ydre Maal for Delmængder af den uendeligdimensionale Enhedsterning Q kan defineres paa en anden Maade, som slutter sig nærmere til den sædvanlige Definition for et Rum af endelig mange Dimensioner. Betegner vi som et uendeligdimensionalt Interval enhver Punktmængde, som defineres ved et endeligt Antal Uligheder af Formen $\alpha_n \leqq \theta_n < \beta_n$ suppleret med Ulighederne $0 \leqq \theta_n < 1$ for de øvrige Koordinaters Vedkommende, vil nemlig, som man uden Vanskelighed viser, indre og ydre Maal for en vilkaarlig Delmængde Ω af Q være bestemt henholdsvis som øvre og nedre Grænse for Maalet af alle Mængder, sammensat af et endeligt Antal Delintervaller af Q, som henholdsvis tilhører og indeholder Ω; Maalet for en saadan Mængde beregnes imidlertid simpelthen som Summen af Maalene for de enkelte Intervaller, hvoraf den er sammensat, og disse er igen hver for sig bestemt som Produktet af de tilsvarende Differenser $\beta_n - \alpha_n$. I denne Formulering viser vor Definition af indre og ydre Maal sig som den svagest mulige; men samtidig som den, hvori Endeligheden i de JORDAN'ske Bestemmelser er stærkest fremhævet, idet den er udstrakt ogsaa til Intervallets Definition.

en kontinuert Punktsandsynlighed, d. v. s. der vil eksistere en Funktion $F(P)$, kontinuert i hele Planen, som er integrabel netop over de Punktmængder M, for hvilke $W(M)$ er defineret og med denne Sandsynlighed til Integral; og disse Sandsynligheder vil være de samme som de i foregaaende Paragraf definerede.

Vi viser denne Sætning, idet vi viser, at for enhver Punktmængde M

$$W_i(M) = m_i(\Omega); \quad W_y(M) = m_y(\Omega),$$

naar $W_i(M)$ og $W_y(M)$ betegner de ved Relationerne (3) definerede Sandsynligheder, og Ω er den til M svarende Delmængde af Q. Det er tilstrækkeligt at bevise den anden af disse Relationer; den første henføres hertil ved Betragtning af Komplementærmængderne. Lad som ovenfor M_0 betegne den Del af M, som tilhører Rektanglet R; da er $W_y(M) = W_y(M_0)$; til M_0 som til M svarer i Q Mængden Ω; hvad vi skal vise er, at $W_y(M_0) = m_y(\Omega)$. Idet

$$W_y(M_0) = \lim_{N \to \infty} W_{N,y}(M_0); \quad m_y(\Omega) = \lim_{N \to \infty} m_y(\Omega_N)$$

er dette ensbetydende med at vise, at der til ethvert $\varepsilon > 0$ svarer et $N = N(\varepsilon)$ saa stort, at Differensen

$$m_y(\Omega_N) - W_{N,y}(M_0)$$

er numerisk mindre end ε.

Lad (for et vilkaarligt N) $\Sigma_{N,\infty}$ betegne Summen af den (konvergente) uendelige Række $\sum_{n=N+1}^{\infty} \omega_n$. Den største Afstand η_N fra Begyndelsespunktet til et Punkt af Mængden $\Sigma_{N,\infty}$ konvergerer mod Nul for $N \to \infty$. Er $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ et Punkt af Σ, som tilhører M_0, vil Punktet $\sum_{n=0}^{N} P_n$ af Σ_N tilhøre $M_0 - \Sigma_{N,\infty}$; er omvendt $\sum_{n=0}^{N} P_n$ et Punkt af Σ_N, som tilhører $M_0 - \Sigma_{N,\infty}$, vil det kunne skrives paa Formen $P - \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n$, hvor Punktet $P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$ tilhører M_0. Til Punktmængden $M_0 - \Sigma_{N,\infty}$ i Σ_N-Planen svarer derfor ved Afbildningen af Σ_N paa Q_N Punktmængden Ω_N. Vi har altsaa $m_y(\Omega_N) = W_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty})$ og faar, idet vi benytter Integralfremstillingen for $W_{N,y}(M)$, for Differensen $m_y(\Omega_N) - W_{N,y}(M_0)$ Udtrykket

$$J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) - J_{N,y}(M_0).$$

Lad S_N betegne et vilkaarligt Punkt af $\Sigma_{N,\infty}$; da er sikkert

$$J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) \geqq J_{N,y}(M_0 - S_N).$$

Lad endvidere $\eta' > 0$ være valgt saa lille, at for hvilkesomhelst to Punkter P og P', hvis Afstand er mindre end η',

$$|F_{N_0}(P) - F_{N_0}(P')| < \frac{\varepsilon}{m(R)},$$

hvor $m(R)$ som ovenfor betegner Arealet af Rektanglet R. Da er ogsaa for ethvert $N > N_0$

$$|F_N(P) - F_N(P')| < \frac{\varepsilon}{m(R)}$$

for hvilkesomhelst to saadanne Punkter. Vælger vi nu $N_1 \geqq N_0$ saa stor, at $\eta_N < \eta'$ naar blot $N \geqq N_1$, er for ethvert saadant N

$$J_{N,y}(M_0 - S_N) > J_{N,y}(M_0) - \varepsilon$$

og følgelig

$$J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) - J_{N,y}(M_0) > -\varepsilon.$$

Vi vil nu vise, at ogsaa omvendt

$$J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) - J_{N,y}(M_0) < \varepsilon$$

for alle tilstrækkeligt store N.

Funktionsfølgen $F_{N_0}(P)$, $F_{N_0+1}(P)$, ..., $F_N(P)$, ... er ligelig begrænset; dens øvre Grænse, som forøvrig er lig med Maksimum for Funktionen $F_{N_0}(P)$, betegner vi K. Vi bestemmer nu en Punktmængde $M_{0,y}$, sammensat af et endeligt Antal Rektangler, som indeholder M_0, samtidig med at den indeholder Begrænsningen for M_0 i sit Indre, og for hvilken

$$m(M_{0,y}) - m_y(M_0) < \frac{\varepsilon}{K}.$$

For at indse at dette er muligt, kan man gaa saaledes frem, at man først bestemmer en Mængde $M'_{0,y}$, sammensat af et endeligt Antal Rektangler, som indeholder M_0, og for hvilken

$$m(M'_{0,y}) - m_y(M_0) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

og dernæst, hvis Rektanglernes Antal er A, erstatter hvert af dem med et ligedannet og koncentrisk, hvis Areal er $\frac{\varepsilon}{2KA}$ større. Disse nye Rektangler vil da danne en Mængde $M_{0,y}$ af den ønskede Art. Vi har øjensynlig for ethvert $N \geqq N_0$

$$J_N(M_{0,y}) - J_{N,y}(M_0) < \varepsilon.$$

Lad nu η'' betegne den positive nedre Grænse for Afstanden fra et Punkt af M_0 til Begrænsningen for $M_{0,y}$, og lad $N_2 \geqq N_0$ være valgt saa stor, at $\eta_N < \eta''$ for alle $N \geqq N_2$. Da tilhører for ethvert saadant N Punktmængden $M_0 - \Sigma_{N,\infty}$ Mængden $M_{0,y}$, og vi har

$$J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) \leqq J_N(M_{0,y})$$

og

$$J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) - J_{N,y}(M_0) < \varepsilon.$$

Vælger vi altsaa N lig med det største af Tallene N_1 og N_2, har vi

$$|m_y(\Omega_N) - W_{N,y}(M_0)| = |J_{N,y}(M_0 - \Sigma_{N,\infty}) - J_{N,y}(M_0)| < \varepsilon,$$

og Beviset er fuldført[1].

Almindeliggørelse til visse Tilfælde af divergente Rækker.

45. Behandlingen af Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af konvekse Kurver kan siges at have faaet sin naturlige Afslutning gennem den foregaaende Undersøgelse, forsaavidt som Forudsætningen om, at den uendelige Række

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$$

er konvergent, frembyder sig af sig selv. Vi vil imidlertid vise, at allerede en væsentlig svagere Forudsætning er tilstrækkelig til at sikre den ligelige Konvergens af Funktionsfølgen $F_{N_0}(P)$, $F_{N_0+1}(P)$, ..., $F_N(P)$, ...

Vi beviser først en Hjælpesætning om *Sammensætning af Punktsandsynligheder*. For ethvert fast N og ethvert positivt helt Tal p bestemmes Punktmængden $\Sigma_{N+p} = \sum_{n=0}^{N+p} \omega_n$ som Sum af de to Punktmængder $\Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} \omega_n$ og $\Sigma_{N,N+p} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \omega_n$,

$$(5) \qquad \Sigma_{N+p} = \Sigma_N + \Sigma_{N,N+p}.$$

Antager vi $N \geqq N_0$, vil der paa Punktmængderne Σ_N og Σ_{N+p} være givet bestemte Punktsandsynligheder $F_N(P)$ og $F_{N+p}(P)$. For alle p fra et vist Trin p_0 (som afhænger af N) vil den ved Afbildningen af Mængden $\Sigma_{N,N+p}$ paa Enhedsterningen $Q_{N,N+p}$, $0 \leqq \theta_n < 1$, i det p-dimensionale $\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p}$-Rum definerede Mængdesandsynlighed $W_{N,N+p}(M)$ i $\Sigma_{N,N+p}$-Planen kunne fremstilles som Integral af en kontinuert Punktsandsynlighed $F_{N,N+p}(P)$; vi vil vise, at der for ethvert saadant $p \geqq p_0$ gælder Relationen

$$(6) \qquad \underline{F_{N+p}(P) = \iint_{\Sigma_{N,N+p}} F_N(P - P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma_{N,N+p},}$$

hvor $P_{N,N+p}$ betegner det Punkt af $\Sigma_{N,N+p}$, der bestemmes som Sum af de til Parameterværdierne $\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p}$ svarende Punkter af Kurverne $\omega_{N+1}, \ldots, \omega_{N+p}$.

---

[1] I det almindelige Tilfælde, hvor vi paa Kurverne ω_n kun tænker os givet kontinuerte Buesandsynligheder $w_n(b_n)$, indser man ved en lignende Betragtning som den ovenfor anvendte om Mængdesandsynligheden $W(M)$, at den i alle Tilfælde, hvor blot Kurverne ω_n ikke indeholder rette Liniestykker, nøjagtig som Mængdesandsynlighederne $W_N(M)$ (se § 11) vil være defineret for ethvert Rektangel R i Planen, og at Rektangelsandsynligheden $W(R)$ (der bestemmes som $\lim_{N \to \infty} W_N(R)$) vil være en i hele Planen kontinuert Funktion af R, som da og kun da er positiv, naar R i sit Indre indeholder Punkter af Σ. Denne Bemærkning (som vi dog ikke skal udføre nærmere) viser Anvendeligheden af det indførte Maal ogsaa i Tilfælde, hvor der ikke er Tale om nogen Punktsandsynlighed.

Den ved Integralet fremstillede Funktion af P er kontinuert i hele Planen. For at vise, at den er lig med $F_{N+p}(P)$, er det tilstrækkeligt at vise, at dens Integral over ethvert Rektangel R er lig med Rektangelsandsynligheden $W_{N+p}(R)$. Nu er

$$\iint_R dR \iint_{\Sigma_{N,N+p}} F_N(P-P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma_{N,N+p} =$$

$$\iint_{\Sigma_{N,N+p}} d\Sigma_{N,N+p} \iint_R F_N(P-P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, dR =$$

$$\iint_{\Sigma_{N,N+p}} W_N(R-P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma_{N,N+p}.$$

Hvad vi skal vise er derfor blot, at dette sidste Integral

$$I = \iint_{\Sigma_{N,N+p}} W_N(R-P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma_{N,N+p}$$

er lig med $W_{N+p}(R)$, hvilket er ensbetydende med, at der for ethvert positivt Tal ε skal gælde Uligheden

$$|I - W_{N+p}(R)| < \varepsilon.$$

Funktionen $F_{N,N+p}(P)$ er Nul for alle Punkter, som ikke tilhører $\Sigma_{N,N+p}$. Vi har derfor

$$I = \iint_{R_0} W_N(R-P)\, F_{N,N+p}(P)\, dR_0,$$

hvor R_0 er et Rektangel, som indeholder $\Sigma_{N,N+p}$. Da Funktionen $W_N(R-P)$ er kontinuert, er det muligt at dele R_0 i et endeligt Antal smaa Rektangler $R_0^1, R_0^2, \ldots, R_0^m$ med Midtpunkter $P^1, P^2, \ldots, P^m$ saaledes, at for ethvert Punkt P, som tilhører et af disse Rektangler R_0^μ,

$$|W_N(R-P^\mu) - W_N(R-P)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da er øjensynlig

$$\left| I - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ W_N(R-P^\mu) \iint_{R_0^\mu} F_{N,N+p}(P)\, dR_0^\mu \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eller

$$\left| I - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ W_N(R-P^\mu)\, W_{N,N+p}(R_0^\mu) \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

For Rektangelsandsynligheden $W_{N+p}(R)$ har vi, som man ser ved gentagen Anvendelse af Formlen

$$W_{n+1}(R) = \int_0^1 W_n(R - P_{n+1})\, d\theta_{n+1},$$

Fremstillingen

$$\text{(8)} \qquad W_{N+p}(R) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 W_N(R - P_{N,N+p})\, d\theta_{N+1} \ldots d\theta_{N+p} =$$

$$\int \cdots \int_{Q_{N,N+p}} W_N(R - P_{N,N+p})\, dQ_{N,N+p}.$$

De til Rektanglerne $R_0^\mu (\mu = 1, 2, \ldots, m)$ svarende Delmængder Ω^μ af $Q_{N,N+p}$ er maalelige Mængder med Maalet $W_{N,N+p}(R_0^\mu)$; de har to og to intet Punkt fælles og udfylder tilsammen $Q_{N,N+p}$; for ethvert Punkt $(\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p})$ af Ω^μ er

$$|W_N(R - P^\mu) - W_N(R - P_{N,N+p})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nu er ifølge (8)

$$W_{N+p}(R) = \sum_{\mu=1}^{m} \int \cdots \int_{\Omega^\mu} W_N(R - P_{N,N+p})\, d\Omega^\mu;$$

ved Anvendelse af Middelværdisætningen faas heraf

$$\left| W_{N+p}(R) - \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ W_N(R - P^\mu)\, W_{N,N+p}(R_0^\mu) \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

som i Forbindelse med (7) giver os den søgte Relation

$$|I - W_{N+p}(R)| < \varepsilon.$$

Hermed er den opstillede Hjælpesætning bevist.

46. Ved Hjælp af Formlen (6) faar vi for Størrelsen

$$F_N(P) - F_{N+p}(P),$$

hvor vi antager $N \geqq N_0$, $p \geqq p_0 = p_0(N)$, Udtrykket

$$F_N(P) - F_{N+p}(P) = \iint_{\Sigma_{N,N+p}} \left\{ F_N(P) - F_N(P - P_{N,N+p}) \right\} F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma_{N,N+p}.$$

Lad ϱ_N være et vilkaarligt positivt Tal, og lad Γ_N betegne den afsluttede Cirkelskive med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius ϱ_N. Integralet af $F_{N,N+p}(P_{N,N+p})$ over den Del af $\Sigma_{N,N+p}$, som tilhører Γ_N, er lig med Sandsynligheden $W_{N,N+p}(\Gamma_N)$

for, at et vilkaarligt Punkt af $\Sigma_{N,N+p}$ tilhører Γ_N. Integralet af $F_{N,N+p}(P_{N,N+p})$ over den Del af $\Sigma_{N,N+p}$, som ikke tilhører Γ_N, er lig med $1-W_{N,N+p}(\Gamma_N)$. Vi har derfor

$$\underset{P}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_{N+p}(P)| \leq$$
$$\underset{PP' \leq \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_N(P')| \, W_{N,N+p}(\Gamma_N) +$$
$$\underset{PP' > \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_N(P')| \, (1-W_{N,N+p}(\Gamma_N)).$$

Nu er, som Følge af Formlen

$$F_{n+1}(P) = \int_0^1 F_n(P-P_{n+1}) \, d\theta_{n+1},$$

$$\underset{PP' \leqq \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_N(P')| \leq \underset{PP' \leqq \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_{N_0}(P)-F_{N_0}(P')|.$$

Endvidere er

$$\underset{PP' > \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_N(P')| \leq \underset{P}{\text{Øvre Grænse}} \, F_N(P) \leq \underset{P}{\text{Øvre Grænse}} \, F_{N_0}(P) = K.$$

Idet $W_{N,N+p}(\Gamma_N) \leq 1$, faar vi da

$$\underset{P}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_{N+p}(P)| \leq \underset{PP' \leq \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_{N_0}(P)-F_{N_0}(P')| + K(1-W_{N,N+p}(\Gamma_N)).$$

Heraf følger umiddelbart, at det for at sikre den ligelige Konvergens af Funktionsfølgen $F_{N_0}(P)$, $F_{N_0+1}(P)$, ..., $F_N(P)$, ... er tilstrækkeligt at forlange, at *der skal kunne tilordnes ethvert Tal* $N \geq N_0$ *to positive Tal* ϱ_N *og* η_N, *som begge konvergerer mod Nul for* $N \to \infty$, *saaledes at for ethvert* $p \geqq p_0 = p_0(N)$

$$\underline{1-W_{N,N+p}(\Gamma_N) < \eta_N,} \tag{9}$$

hvor Γ_N *betegner den afsluttede Cirkelskive med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius* ϱ_N.

Thi antager vi denne Betingelse opfyldt, og bestemmer vi svarende til et vilkaarligt Tal $\varepsilon > 0$ et Tal $N = N(\varepsilon)$ saa stort, at samtidig

$$\underset{PP' \leqq \varrho_N}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_{N_0}(P)-F_{N_0}(P')| < \frac{\varepsilon}{4}$$

og

$$\eta_N < \frac{\varepsilon}{4K},$$

hvad der er muligt som Følge af den ligelige Kontinuitet af Funktionen $F_{N_0}(P)$, er for ethvert $p \geqq p_0 = p_0(N)$

$$\underset{P}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P)-F_{N+p}(P)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

For hvilkesomhelst to Tal N_1 og N_2 større end eller lig med $N+p_0$ og for ethvert Punkt P i Planen er da

$$|F_{N_1}(P) - F_{N_2}(P)| < \varepsilon;$$

men det er netop Betingelsen for den ligelige Konvergens af Funktionsfølgen $F_{N_0}(P)$, $F_{N_0+1}(P), \ldots, F_N(P), \ldots$.

Den angivne Betingelse er specielt opfyldt, naar den uendelige Række $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ er konvergent. Thi sætter vi

$$\varrho_N = \delta_N = \text{Øvre Grænse}_{p}\ \delta_{N,N+p},$$

hvor $\delta_{N,N+p}$ som ovenfor betegner øvre Grænse for Afstanden fra Begyndelsespunktet til et Punkt af Mængden $\Sigma_{N,N+p}$, vil ϱ_N konvergere mod Nul for $N \to \infty$ og

$$1 - W_{N,N+p}(\Gamma_N)$$

vil være konstant lig med Nul. Vi skal imidlertid senere ved et Eksempel vise, at Betingelsen ogsaa kan være opfyldt i Tilfælde, hvor Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ er divergent.

47. Lad os nu antage den fundne Betingelse opfyldt. Da $\eta_N \to 0$ for $N \to \infty$, kan vi bestemme et Tal N_1 saa stort, at for alle $N \geqq N_1$, $\eta_N < 1$. For ethvert saadant N og ethvert $p \geqq p_0 = p_0(N)$ er da ifølge (9)

$$W_{N,N+p}(\Gamma_N) > 0$$

og Punktmængden $\Sigma_{N,N+p}$ indeholder sikkert Punkter af Γ_N. Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ falder altsaa ind under de i § 7 betragtede uendelige Rækker, som det var muligt paa naturlig Maade at tilordne en bestemt Sum; denne Sum betegner vi som ovenfor Σ.

Grænsefunktionen $F(P)$ for Funktionsfølgen $F_{N_0}(P), F_{N_0+1}(P), \ldots, F_N(P), \ldots$ er en i hele Planen kontinuert og begrænset Funktion af Punktet P; den er aldrig negativ. Vi vil vise, at den er positiv netop for de indre Punkter af Mængden Σ, d. v. s. for de og kun de Punkter, som tillige med en vis Omegn tilhører det Indre for samtlige Mængder Σ_N fra et vist Trin. At ethvert Punkt Q, for hvilket $F(Q) > 0$, er indre Punkt for Σ er klart; thi for alle Punkter P i en vis Omegn af Q er som Følge af Kontinuiteten $F(P) > \frac{1}{2} F(Q)$, altsaa som Følge af den ligelige Konvergens for alle N fra et vist Trin $F_N(P) > 0$, hvad der netop er ensbetydende med, at den betragtede Omegn tilhører det Indre af Σ_N. At ogsaa omvendt $F(Q) > 0$ for ethvert indre Punkt Q af Σ følger af Betingelsen fra § 46; vælger vi nemlig N saa stor, at den afsluttede Cirkelskive $Q + \Gamma_N$ med Centrum Q og Radius ϱ_N tilhører det Indre for Mængden Σ_N samtidig med at $\eta_N < \frac{1}{2}$, er for ethvert $p \geqq p_0 = p_0(N)$ ifølge (9) $W_{N,N+p}(\Gamma_N) > \frac{1}{2}$; altsaa er ifølge (6) $F_{N+p}(Q) > \frac{1}{2} g$, naar vi med g betegner den positive nedre Grænse for $F_N(P)$ paa $Q + \Gamma_N$. Men heraf følger ved Grænseovergangen $p \to \infty$ at $F(Q) \geqq \frac{1}{2} g$, hvormed Beviset er fuldført.

Vi vil vise, at *Integralet af Funktionen $F(P)$ udstrakt over Punktmængden Σ*, som er lig med Integralet udstrakt over hele Planen, *er lig med 1*.

Lad C med Radius r være en afsluttet Cirkelskive med Centrum i Begyndelsespunktet. Vi har

$$\iint_C F(P)\,dC = \lim_{N\to\infty} \iint_C F_N(P)\,dC \leqq 1.$$

Hvad vi skal vise er, at Integralet $\iint_C F(P)\,dC$ for $r \to \infty$ konvergerer mod 1, at der m. a. O. til ethvert selv nok saa lille positivt Tal η svarer et $r = r(\eta)$ saa stort, at

$$\iint_C F(P)\,dC \geqq 1-\eta, \tag{10}$$

hvor $C = C(\eta)$ er Cirklen med Radius $r(\eta)$.

Som Følge af vor Forudsætning kan vi bestemme et Tal N saa stort, at for ethvert $p \geqq p_0 = p_0(N)$

$$1 - W_{N,N+p}(\Gamma_N) < \eta,$$

hvor Γ_N er den afsluttede Cirkelskive med Centrum O og Radius ϱ_N. Lad d_N betegne den største Afstand fra Begyndelsespunktet til et Punkt af Mængden Σ_N; vi vil vise, at Betingelsen (10) er opfyldt, naar vi sætter $r = d_N + \varrho_N$. For ethvert Punkt Q af Γ_N er da Punktmængden $\Sigma_N + Q$ en Delmængde af C, og vi har

$$\iint_C F_N(P-Q)\,dC = 1.$$

Lad $\Sigma^*_{N,N+p}$ betegne den Del af $\Sigma_{N,N+p}$, som tilhører Γ_N; som Følge af Relationen (6) i § 45 er for ethvert $p \geqq p_0$

$$\begin{aligned}\iint_C F_{N+p}(P)\,dC &= \iint_C dC \iint_{\Sigma_{N,N+p}} F_N(P - P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma_{N,N+p} = \\ &\iint_{\Sigma_{N,N+p}} d\Sigma_{N,N+p} \iint_C F_N(P - P_{N,N+p})\, F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, dC \geqq \\ &\iint_{\Sigma^*_{N,N+p}} F_{N,N+p}(P_{N,N+p})\, d\Sigma^*_{N,N+p} = W_{N,N+p}(\Gamma_N) > 1-\eta.\end{aligned}$$

Heraf følger imidlertid umiddelbart ved Grænseovergangen $p \to \infty$, at

$$\iint_C F(P)\,dC \geqq 1-\eta, \tag{10}$$

hvormed den opstillede Sætning er bevist.

Funktionen $F(P)$ betegnes som en *kontinuert Punktsandsynlighed* svarende til Punktmængden Σ.

48. Lad M betegne en vilkaarlig Punktmængde i Planen; vi vil vise, at Sandsynlighederne $W_{N,i}(M)$ og $W_{N,y}(M)$ som ovenfor for $N \to \infty$ konvergerer mod bestemte Grænseværdier

$$W_i(M) = \lim_{N \to \infty} W_{N,i}(M) \quad \text{og} \quad W_y(M) = \lim_{N \to \infty} W_{N,y}(M)$$

bestemt henholdsvis som det indre Integral $J_i(M)$ og det ydre Integral $J_y(M)$ af Funktionen $F(P)$ over Mængden M. Er M begrænset, følger dette straks af Ulighederne

$$\left.\begin{array}{l} |J_{N,i}(M) - J_i(M)| \\ |J_{N,y}(M) - J_y(M)| \end{array}\right\} \leqq \underset{P}{\text{Øvre Grænse}} \, |F_N(P - F(P)| \cdot m_y(M),$$

hvor $J_{N,i}(M) = W_{N,i}(M)$ og $J_{N,y}(M) = W_{N,y}(M)$ betegner det indre og det ydre Integral af $F_N(P)$ over Mængden M og $m_y(M)$ det ydre Maal for M. Er M ubegrænset, kan vi gaa saaledes frem: Lad η betegne et vilkaarligt lille positivt Tal; svarende til dette bestemmer vi som ovenfor et positivt helt Tal N og en Cirkel C med Centrum i Begyndelsespunktet saa stor, at for ethvert $p \geqq p_0 = p_0(N)$

$$\iint_C F_{N+p}(P)\, dC > 1 - \eta.$$

Betegner vi med M_0 den fælles Del for M og C, er da

$$(11) \qquad J_{N+p,i}(M) - J_{N+p,i}(M_0) < \eta, \quad J_{N+p,y}(M) - J_{N+p,y}(M_0) < \eta.$$

Samtidig er ifølge (10)

$$(12) \qquad J_i(M) - J_i(M_0) \leqq \eta, \quad J_y(M) - J_y(M_0) \leqq \eta.$$

Nu er M_0 begrænset; bestemmer vi derfor et Tal $p_1 \geqq p_0$ saa stort, at for ethvert $p \geqq p_1$

$$|J_{N+p,i}(M_0) - J_i(M_0)| < \eta, \quad |J_{N+p,y}(M_0) - J_y(M_0)| < \eta,$$

faas ved Hjælp af (11) og (12) for enhver saadan Værdi af p

$$|J_{N+p,i}(M) - J_i(M)| < 3\eta; \quad |J_{N+p,y}(M) - J_y(M)| < 3\eta.$$

Disse Uligheder viser, at $J_{N+p,i}(M)$ og $J_{N+p,y}(M)$ for $p \to \infty$ konvergerer henholdsvis mod $J_i(M)$ og $J_y(M)$.

Størrelserne $W_i(M)$ og $W_y(M)$ betegnes henholdsvis som den indre og den ydre Sandsynlighed for, at et vilkaarligt Punkt af Σ tilhører M. Er de to Sandsynligheder ligestore, betegner vi deres fælles Værdi $W(M)$ som Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Punkt af Σ tilhører M; Mængdefunktionen $W(M)$, der betegnes som den til Mængden Σ svarende *Mængdesandsynlighed* i Planen bestemmes paany ved Integralfremstillingen

$$(4) \qquad W(M) = \iint_M F(P)\, dM,$$

og er som den tidligere Mængdesandsynlighed defineret for de og kun de Mængder M, som af Σ indeholder en maalelig Mængde. Til en Fremstilling af $W(M)$ ved Hjælp af et uendeligdimensionalt Maal, saaledes som det i § 44 er sket for de konvergente Rækker, er der derimod ingen Anledning i det foreliggende Tilfælde, hvor Punktmængden Σ ikke umiddelbart fremtræder som Billede af den uendeligdimensionale Enhedsterning.

Eksempel.

49. Vi vil anvende de foregaaende Betragtninger paa et specielt Tilfælde, hvor de givne Kurver er definerede ad analytisk Vej.

Den analytiske Funktion

$$Y = \mathrm{Log}\; X \tag{13}$$

af den komplekse Variable X antager for $X = 0$ og for $X = \infty$ Værdien $Y = \infty$. Sætter vi iøvrigt

$$Y = U + iV;\quad X = Re^{2\pi i\Theta},\ \left(-\frac{1}{2} \leqq \Theta < \frac{1}{2}\right),$$

faar vi

$$U = \log R;\quad V = 2\pi\Theta.$$

Funktionen (13) afbilder derfor den langs den negative Halvakse opskaarne X-Plan paa en Parallelstrimmel $-\pi \leqq V < \pi$ i Y-Planen; ved Afbildningen gaar Cirkler $R = R_0$ over i rette Liniestykker $U = U_0$, medens Halvlinier $\Theta = \Theta_0$ gaar over i rette Linier $V = V_0$; Afbildningen er konform.

En Cirkel

$$X = 1 - re^{2\pi i\theta},\ 0 \leqq \theta < 1 \tag{14}$$

i X-Planen gaar ved Afbildningen over i en Kurve

$$Y = \mathrm{Log}\,(1 - re^{2\pi i\theta}) \tag{15}$$

i Y-Planen uden Dobbeltpunkter. Er $r < 1$ er denne Kurve lukket og tilhører den af Linierne $V = -\frac{\pi}{2}$ og $V = \frac{\pi}{2}$ begrænsede Parallelstrimmel; er $r = 1$ har Kurven disse Linier til Asymptoter, men lukker sig i det uendelig fjerne Punkt; er endelig $r > 1$ er Kurven en aaben Bue, hvis Endepunkter falder paa Linierne $V = -\pi$ og $V = \pi$.

Lad os nu antage $r < 1$. Ligningen (15) fremstiller da (se Fig. 34) en *konveks* Jordankurve ω; thi som Følge af den konforme Afbildning har Kurven i det vilkaarlige Punkt Y en bestemt Tangent, hvis Vinkel med den med U-Aksen parallele Linie gennem Punktet er lig med Vinklen mellem Cirkeltangenten i det tilsvarende Punkt X og dette Punkts Radiusvektor. Denne Vinkel, hvis Gradantal er det halve af Gradantallet for den af Radiusvektor paa Cirklen afskaarne Bue, varierer monotont, naar X gennemløber Cirklen (14). Det samme gælder derfor Tangenten til Jordankurven (15), som altsaa er konveks. Foruden at være symmetrisk omkring Linien $V=0$ er Kurven ω symmetrisk om den derpaa vinkelrette Linie $U = \log\sqrt{1-r^2}$; thi til en Spejling af Y-Planen i denne Linie svarer en Spejling af X-Planen i Cirklen $R=\sqrt{1-r^2}$; men ved denne Spejling gaar Cirklen (14) over i sig selv.

Til voksende Værdier af θ svarer en bestemt Omløbsretning paa Kurven ω. Vinklen mellem den positive U-Akse og den i Overensstemmelse med denne Omløbsretning orienterede Tangent til ω i det vilkaarlige Punkt $Y = Y(\theta)$ har Størrelsen $\arg\frac{dY}{d\theta}$. Nu er som Følge af Relationerne (14) og (15) ikke alene Funktionerne X og Y, men ogsaa R og Θ, $\frac{dY}{d\theta}$, $\arg\frac{dY}{d\theta}$ o. s. v. differentiable Funktioner af den reelle Variable θ. Kurven ω har derfor i Punktet Y en bestemt Krumningsradius (§ 14) bestemt som Grænseværdi for Forholdet mellem Korden $|\Delta Y|$ og Totalkrumningen $\Delta\arg\frac{dY}{d\theta}$ for den til Parameterintervallet $(\theta, \theta+\Delta\theta)$ svarende forsvindende Bue Y, $Y+\Delta Y$ af ω. Thi for $\Delta\theta\to 0$ vil dette Forhold konvergere mod Forholdet mellem den numeriske Værdi $\left|\frac{dY}{d\theta}\right|$ af Differentialkvotienten $\frac{dY}{d\theta}$ og Differentialkvotienten $\frac{d\arg\frac{dY}{d\theta}}{d\theta}$ i Punktet θ. Idet $\frac{dY}{dX}=\frac{1}{X}$, har man $\frac{dY}{d\theta}=\frac{dX}{d\theta}\cdot\frac{1}{X}=-r\cdot 2\pi i\cdot e^{2\pi i\theta}\cdot\frac{1}{X}$, hvoraf dels $\left|\frac{dY}{d\theta}\right| = \frac{r\cdot 2\pi}{R}$ dels $\arg\frac{dY}{d\theta} = -\frac{\pi}{2}+2\pi\theta-2\pi\Theta$ og altsaa $\frac{d\arg\frac{dY}{d\theta}}{d\theta} = 2\pi-2\pi\frac{d\Theta}{d\theta}$. Vi faar derfor for Krumningsradius Udtrykket

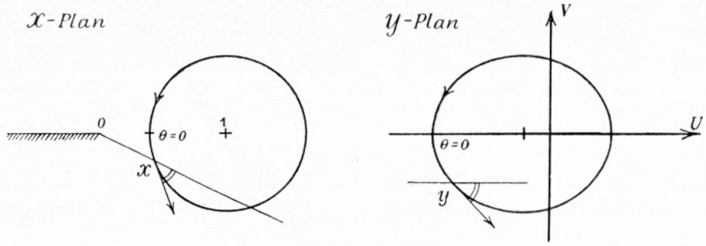

Fig. 34.

$$(16)\qquad \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{|\Delta Y|}{\Delta\arg\frac{dY}{d\theta}} = \frac{r}{R\left(1-\frac{d\Theta}{d\theta}\right)}.$$

Nu er ifølge (14)

$$R\cos 2\pi\Theta = 1 - r\cos 2\pi\theta$$
$$R\sin 2\pi\Theta = \quad -r\sin 2\pi\theta.$$

Ved Differentiation faas heraf to lineære Ligninger til Bestemmelse af $\frac{dR}{d\theta}$ og $\frac{d\Theta}{d\theta}$; man faar

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = -\frac{r\cos 2\pi\theta\cos 2\pi\Theta + r\sin 2\pi\theta\sin 2\pi\Theta}{R} = -\frac{\cos 2\pi\Theta - R}{R}.$$

Indsættes dette i (16), faar man for Krumningsradius Udtrykket

$$\frac{r}{\cos 2\pi\Theta}.$$

Indre og ydre Radius i den givne Kurve, der (se § 14) bestemmes som nedre og øvre Grænse for samtlige Krumningscirklers Radier, bliver derefter henholdsvis

$$r_i = r \quad \text{og} \quad r_y = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}; \tag{17}$$

for enhver Værdi af r er $0 < r_i$; $r_y < \infty$; Kurven tilhører derfor den i § 12 afgrænsede Kurveklasse.

Ved Hjælp af Parameterfremstillingen (15) er der defineret en kontinuert Buesandsynlighed paa Kurven ω; som man ser, er denne Sandsynlighed differentiabel; dens Differentialkvotient $\left|\frac{d\theta}{dY}\right| = \frac{R}{r \cdot 2\pi}$ fremstiller en kontinuert Punktsandsynlighed paa Kurven.

50. Lad der nu være givet *en Følge*

$$r_0, r_1, \ldots, r_N, \ldots \tag{18}$$

af positive Tal r_n *mindre end 1, som konvergerer mod Nul for* $n \to \infty$. *De tilsvarende Kurver* ω_n, hvis Parameterfremstillinger er

$$Y_n = \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i \theta_n}),\ 0 \leq \theta_n < 1, \tag{19}$$

er konvekse Kurver af Klassen K; deres Radier

$$r_{n,i} = r_n \quad \text{og} \quad r_{n,y} = \frac{r_n}{\sqrt{1-r_n^2}}$$

konvergerer mod Nul for $n \to \infty$. Betingelserne for Anvendelsen af Betragtningerne i forrige Kapitel er saaledes tilstede.

For enhver Værdi af N fremkommer Punktmængden $\Sigma_N = \sum_{n=0}^{N} \omega_n$ som Værdiforraad for Funktionen

$$S_N(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N) = \sum_{n=0}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i \theta_n}),$$

naar de Variable $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$ uafhængig af hinanden gennemløber Intervallet (0, 1), eller, hvad der kommer ud paa det samme, naar Punktet $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ gennemløber Enhedsterningen Q_N i det $N+1$-dimensionale $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$-Rum. Den indre og ydre Sandsynlighed $W_{N,i}(M)$ og $W_{N,y}(M)$ for at et Punkt af Σ_N tilhører en given Punktmængde M i Planen bestemmes henholdsvis som det indre og ydre Jordan'ske Maal for Mængden Ω af Punkter $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ af Q_N, for hvilke $S_N(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N)$ tilhører M. For alle N fra et vist Trin N_0 fremstilles disse Sandsynligheder henholdsvis som det indre og ydre Integral over Mængden M af en kontinuert Punktsandsynlighed $F_N(Y)$ i Planen.

Er den uendelige Række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1-r_n e^{2\pi i \theta_n}) \tag{20}$$

konvergent, d. v. s. *er Rækken*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n \tag{21}$$

konvergent, vil Punktsandsynlighederne $F_N(Y)$, som det fremgaar af den almindelige Undersøgelse i §§ 41—43, for $N \to \infty$ konvergere mod en kontinuert Punktsandsynlighed $F(Y)$ paa den ved Rækken (20) fremstillede Mængde $\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$.

Er Rækken (21) divergent, er ogsaa den uendelige Række (20) divergent; vi kan derfor ikke umiddelbart udsige noget om Eksistensen af en Grænsefunktion for Funktionsfølgen $F_{N_0}(Y)$, $F_{N_0+1}(Y)$, ..., $F_N(Y)$, ... Vi vil imidlertid vise, at der ogsaa i dette Tilfælde, *naar blot den uendelige Række*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^2, \tag{22}$$

hvis Led er *Kvadraterne* paa de givne Radier, *er konvergent*, i den i §§ 45—48 angivne Betydning eksisterer en kontinuert Punktsandsynlighed $F(Y)$ bestemt ved de givne, uendelig mange, konvekse Kurvers Addition[1].

For ethvert Tal $N \geqq N_0$ og ethvert positivt Tal p fremkommer den i § 45 indførte Punktmængde $\Sigma_{N,N+p} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \omega_n$ som Værdiforraad for Funktionen

$$S_{N,N+p}(\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p}) = \sum_{n=N+1}^{N+p} \operatorname{Log}\,(1-r_n e^{2\pi i \theta_n}),$$

naar Punktet $(\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p})$ gennemløber Enhedsterningen $Q_{N,N+p}$ i det p-dimensionale $\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p}$-Rum. Afbildningen af $\Sigma_{N,N+p}$ paa $Q_{N,N+p}$ bestemmer en Mængdesandsynlighed $W_{N,N+p}(M)$ i $\Sigma_{N,N+p}$-Planen. Er $p \geqq p_0 = p_0(N)$, kan denne

[1] I alle Tilfælde, hvor Rækken (21) er divergent, falder Rækken (20) ind under de i § 7 betragtede divergente Rækker $\Sigma\omega_n$, som det er muligt paa naturlig Maade at tillægge en bestemt Sum. Summen Σ af Rækken (20) eksisterer derfor uafhængigt af, om Rækken (22) er konvergent, og udgør, som man ved Betragtning af Mængderne Σ_N let viser, i alle Tilfælde selve den komplekse Plan. Medens for konvergente Rækker (20) Punktmængden Σ godt kan falde ind under det i § 6 nævnte Tilfælde af en afsluttet konveks Mængde med en udartet Rand i det Indre, er Tilstedeværelsen af en saadan Rand udelukket, naar Rækken (20) er divergent. Funktionen $F(Y)$ bliver derfor i dette Tilfælde (Konvergensen af Rækken (22) forudsat) altid en i hele den komplekse Plan positiv Funktion.

Mængdesandsynlighed fremstilles som Integral af en kontinuert Punktsandsynlighed paa Mængden $\Sigma_{N,N+p}$.

Vi betragter det over den p-dimensionale Enhedsterning $Q_{N,N+p}$ udstrakte Integral

$$\int\cdots\int_{Q_{N,N+p}} |S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})|^2\,dQ_{N,N+p} =$$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 |S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})|^2\,d\theta_{N+1}\ldots d\theta_{N+p}$$

af Kvadratet paa den absolute Værdi af Funktionen $S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})$. Da

$$|S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})|^2 = S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})\cdot\bar{S}_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p}) =$$

$$\left(\sum_{n=N+1}^{N+p}\operatorname{Log}\left(1-r_n e^{2\pi i\theta_n}\right)\right)\left(\sum_{n=N+1}^{N+p}\operatorname{Log}\left(1-r_n e^{-2\pi i\theta_n}\right)\right) =$$

$$\left(\sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^m\,e^{2\pi i\theta_n\cdot m}}{m}\right)\left(\sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^m\,e^{-2\pi i\theta_n\cdot m}}{m}\right),$$

faas paa bekendt Maade

$$\int\cdots\int_{Q_{N,N+p}} |S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})|^2\,dQ_{N,N+p} = \sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^{2m}}{m^2},$$

hvoraf, da

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^{2m}}{m^2} < \sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^2}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}r_n^2,$$

$$\int\cdots\int_{Q_{N,N+p}} |S_{N,N+p}(\theta_{N+1},\ldots,\theta_{N+p})|^2\,dQ_{N,N+p} < \frac{\pi^2}{6}\sum_{n=N+1}^{N+p} r_n^2. \tag{23}$$

Under Forudsætning af, at den uendelige Række

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 \tag{22}$$

er konvergent, kan vi nu vise, at den i § 46 angivne Betingelse for den ligelige Konvergens af Funktionsfølgen $F_{N_0}(Y)$, $F_{N_0+1}(Y)$, $\ldots$, $F_N(Y)$, $\ldots$ er tilfredsstillet, at der m. a. O. til ethvert $N \geqq N_0$ svarer to positive Tal ϱ_N og η_N, som konvergerer mod Nul for $N\to\infty$, saaledes at for ethvert $p \geqq p_0 = p_0(N)$

$$1 - W_{N,N+p}(\Gamma_N) < \eta_N,$$

hvor Γ_N betegner den afsluttede Cirkelskive med Radius ϱ_N, som har sit Centrum i Punktet $Y = 0$.

For enhver Værdi af ϱ_N svarer der til den Del af $\Sigma_{N,N+p}$, som ikke tilhører Γ_N, en maalelig Delmængde Ω af $Q_{N,N+p}$ med Maalet $1 - W_{N,N+p}(\Gamma_N)$; følgelig er

$$\varrho_N^2(1 - W_{N,N+p}(\Gamma_N)) = \int \cdots \int_\Omega \varrho_N^2 \, d\Omega < \int \cdots \int_\Omega |S_{N,N+p}(\theta_{N+1}, \ldots, \theta_{N+p})|^2 \, d\Omega <$$

$$\frac{\pi^2}{6} \sum_{n=N+1}^{N+p} r_n^2 < R_N,$$

hvor

$$R_N = \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=N+1}^{\infty} r_n^2$$

konvergerer mod Nul for $N \to \infty$. Sætter vi derfor

$$\varrho_N = \eta_N = \sqrt[3]{R_N},$$

vil der for ethvert $p \geq p_0$ gælde Relationen

$$1 - W_{N,N+p}(\Gamma_N) < \frac{R_N}{\varrho_N^2} = \eta_N,$$

og ϱ_N og η_N vil konvergere mod Nul for $N \to \infty$. Hermed er Beviset fuldført.

INDHOLD